Guía de Estudio
MÓDULO 3
2023

REPRESENTACIONES SIMBÓLICAS Y ALGORITMOS

EDUCACIÓN
GABINETE DE IGUALDAD PARA TODAS LAS PERSONAS

EL GOBIERNO DEL NUEVO
NUEVO LEÓN

PREPARATORIA ABIERTA

Coordinadora Estatal de Telebachillerato y del Subsistema de Preparatoria Abierta
Edith Alemán Ramírez

Departamento Académico de la Coordinación de Preparatoria Abierta
Elena Cisneros Rodríguez
Gretel Lizeth Marroquín Lara
Adrián Alcántara Solar
Ma. De los Ángeles Flores González
2023

¿Cómo empezar?

Estimado(a) alumno(a), la "guía de estudio" es una herramienta que te brindará recursos de estudio, para que tengas apoyo durante el proceso autodidacta en este sistema de bachillerato no escolarizado. La guía no reemplaza al libro de texto, pero es una herramienta para facilitar el aprendizaje.

Se compone de diferentes secciones:

Actividades: son ejercicios que podrás llevar a cabo para complementar la lectura de los conceptos clave.

Recurso: son en su mayoría ligas que te redirigirán a una página de apoyo, puede contener información adicional o ejercicios digitales interactivos.

Glosario: contiene la definición breve y concisa de algunas palabras que se consideran importantes en la lectura.

Para reflexionar: este apartado plantea preguntas que desarrollarán tu pensamiento crítico, mediante lecturas, estudios de caso, etc.

Las secciones anteriores construyen tu guía de estudio y son fundamentales, pues están pensadas en función de las competencias a desarrollar de este plan modular; por lo cual te extendemos una amplia invitación a utilizar todos estos elementos para que sean de provecho en este trayecto.

Al finalizar cada unidad habrá una autoevaluación, donde podrás poner a prueba tu conocimiento. Además de servir de refuerzo práctico, te hará saber si estás listo para tu examen del módulo. ¡Mucho éxito!

Índice

Unidad 1: los números reales
1.1 Los números reales: características y subconjuntos. 5
1.2 Operaciones con números reales 6
1.3 Operaciones con fracciones 11
1.4 Ecuaciones y propiedades de la igualdad 15

Unidad 2: Algebra y lenguaje algebraico
2.1 Álgebra 24
2.2 Expresiones algebraicas 26
2.3 Polinomios 30
2.4 Ecuaciones lineales 33
2.5 Ecuaciones cuadráticas y factorización 41

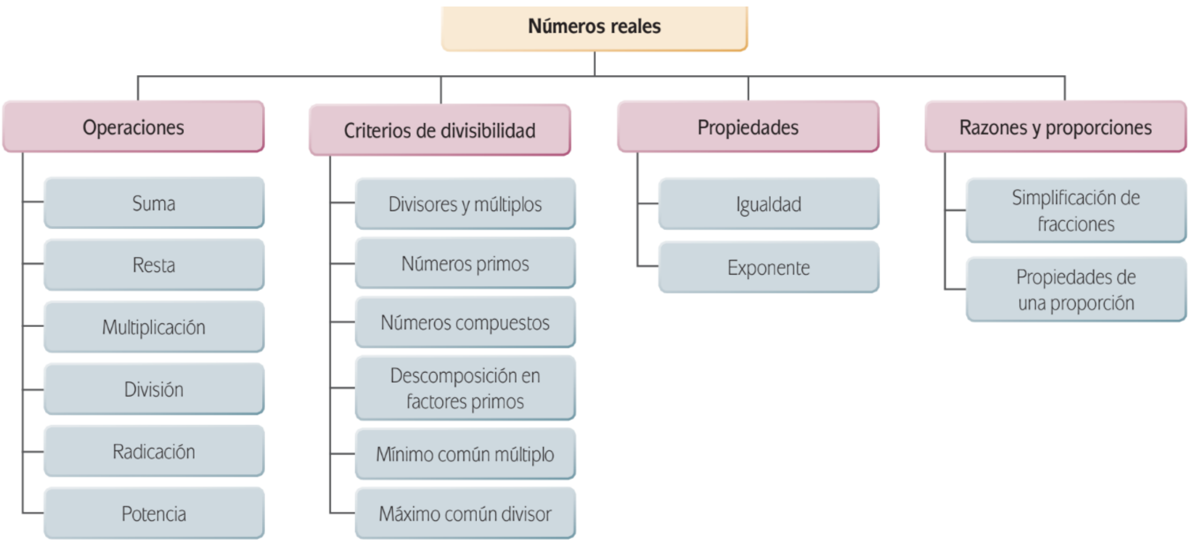
Respuestas de autoevaluaciones........ 50
Solución de actividades........ 50

Unidad 1

Los números reales

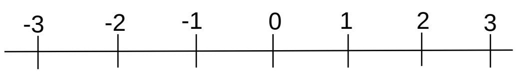
¿Qué voy a aprender y cómo?

Aprenderás a utilizar los números reales en la resolución de problemas relacionados con diversas áreas del conocimiento y con tu entorno, para interpretar situaciones problemáticas y construir alternativas de solución, familiarizándote con los conceptos, definiciones y ejercicios mediante la aplicación de estos.
Fortalecer conocimientos de manera concisa y rápida mediante la información necesaria, haciendo uso continuo de la guía para facilitar la resolución de tareas y posteriormente de situaciones de la vida diaria. Si algún tema no llega a ser comprendido del todo en este material de estudio, recurra al libro de texto, a su maestro o a sus asesores para facilitar el correcto entendimiento.

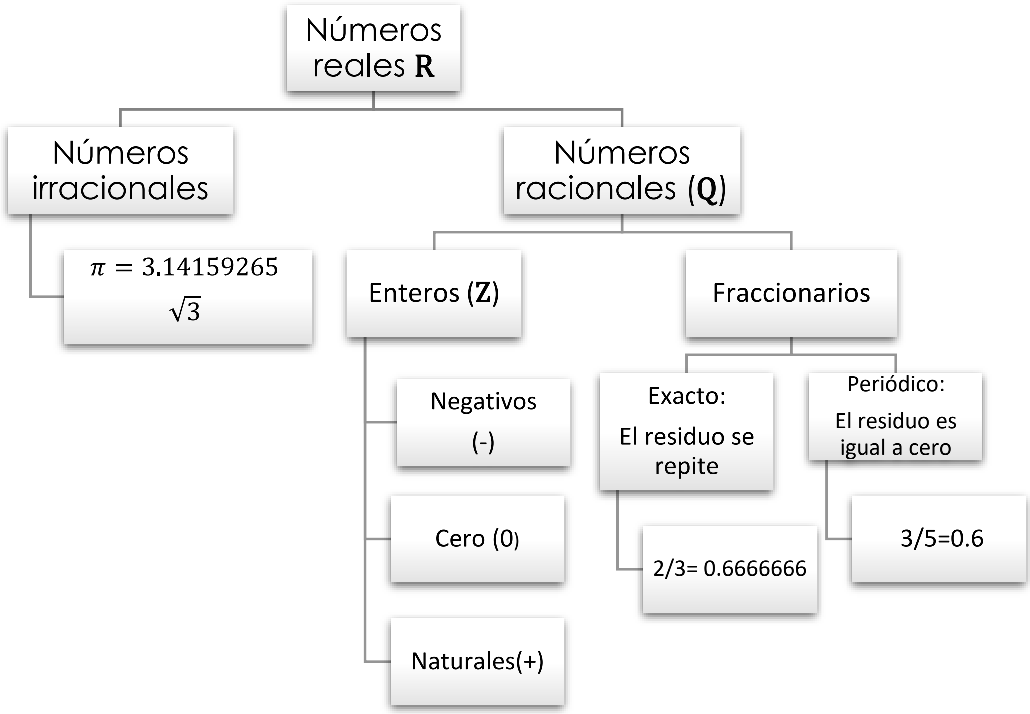


1.1 Los números reales: características y subconjuntos.

Los números reales son todos números que están representados como puntos en la recta real (recta numérica).



Este conjunto está formado por la unión de los conjuntos de números racionales e irracionales. Los números irracionales no pueden ser expresados como una fracción. Utilizando la recta real se puede determinar el **valor absoluto** que se refiere a la distancia que hay entre el origen o cero de la recta y el número al que se haga referencia, independientemente de su signo. (En -3 y +3, el valor absoluto es |3|)



Actividad 1

Ubica los siguientes números dentro de su clasificación. Un número puede ocupar varios grupos de la clasificación.

$$-3 \qquad 2.7 \qquad \frac{3}{7} \qquad \sqrt{4} \qquad \sqrt{7} \qquad \sqrt[3]{9} \qquad 1.020020002\ldots.$$

$$\frac{23}{13} \qquad \frac{8}{4} \qquad -9 \qquad \sqrt{15} \qquad \sqrt[3]{5} \qquad 2.3 \qquad 2.838383$$

Naturales: ___________________________________

Enteros: _____________________________________

Racionales: __________________________________

Reales: _____________________________________

1.2 Operaciones con números reales

Suma

La suma o adición de dos números de igual signo se realiza sumando sus valores absolutos y poniendo al resultado el signo común.

Por ejemplo: $3 + 7 = 10$; $-4 - 9 = -13$

El signo + puede omitirse en los números positivos cuando se encuentran al inicio, como con los casos del tres y el diez del primer ejemplo.

Resta

La resta o sustracción puede expresarse en términos de la suma, puesto que, en general, podemos verla como una suma de números con signo diferente: $21 - 16 = 5$. Ahora bien, la operación de restar un número negativo será equivalente a la de sumar un número positivo $(- - = +)$.

Por ejemplo: $14 - (-9) = 14 + 9 = 23$; $6 - (-5) = 6 + 5 = 11$

Como podemos observar se genera una multiplicación de signos negativos

Multiplicación

La multiplicación o producto de dos números reales de igual signo siempre dará como resultado un número positivo: $+ \cdot +$ o $- \cdot -$.

Por ejemplo: $6 \cdot 8 = 48$; $(-7) \cdot (-3) = 21$

La multiplicación o producto de dos números reales de distinto signo dará como resultado un número negativo. $(+) \cdot (-) = -$; $(-) \cdot (+) = -$.

Por ejemplo: $(5) \cdot (-7) = -35$; $(-9) \cdot (6) = -54$

La suma y la multiplicación cumplen con tres propiedades:

- Conmutativa: cuando dos números son sumados o multiplicado, el orden puede ser cambiado sin afectar el resultado.

  $30 + 25 = 55$ $\quad\quad$ $12 \cdot 7 = 84$

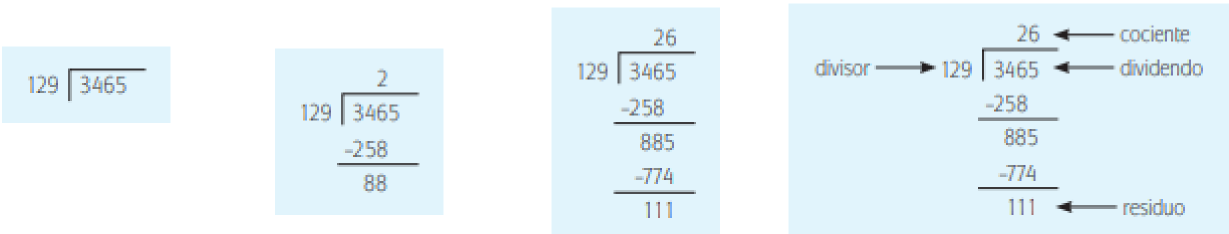
  $25 + 30 = 55$ $\quad\quad$ $7 \cdot 12 = 84$

- Asociativa: los números en una expresión pueden agruparse de distinta manera sin modificar el resultado. $4 + 5 + 6 = 9 + 6 = 15$
- Distributiva: nos permite reescribir expresiones en las que estás multiplicando un número por una suma o una resta.

$$6(5 - 2) = 6(3) = 18$$
$$6(5) - 6(2) = 30 - 12 = 18$$

División

La división o cociente es la operación inversa de la multiplicación y consiste en averiguar cuántas veces un número (divisor) está contenido en otro número (dividendo). Si divides 20 (dividendo) entre 5 (divisor), el resultado es 4 (cociente), porque $20 \div 5 = 4$; $4 \cdot 5 = 20$.



Actividad 2

Responde según las indicaciones en cada ejercicio

1. A. Resuelve las siguientes operaciones cuidando de usar adecuadamente las reglas de los signos:

a. $24 \div -8 =$__________

b. $-120 \div 10 =$__________

c. $155 \div 15 =$__________

d. $11 \div 3 =$_________

e. El coche de Jorge recorrió 584.3 kilómetros en 5 horas y media, ¿a qué velocidad circula su coche?

f. Si un taxi trabaja de lunes a viernes haciendo un recorrido de 300 kilómetros todos los días, ¿en cuántas semanas llegará a 150,000 kilómetros?

2. Identifica las siguientes ecuaciones como propiedad asociativa, conmutativa o distributiva

a) $2 \cdot (3+6) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 18$ ___________________________

b) $\sqrt{2} + (\sqrt{3} + \sqrt{5}) = (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}$ ___________________________

c) $\sqrt{5} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ _________________________

Potenciación

Elevar a la potencia es el resultado que se obtiene al multiplicar un número (**base**) dos o más veces por sí mismo. En particular, la potencia dos, o cuadrado, de un número se obtiene al multiplicarlo por sí mismo y se denota escribiendo el número dos (2) pequeño (**exponente**) en la parte superior derecha de dicho número. Por ejemplo, el cuadrado de cinco se escribe de la siguiente forma: $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$; y el cuadrado de menos tres se escribe $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$. Se puede elevar al cubo, a la cuarta, quinta, etcétera.

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$
$$7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2401$$
$$(-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$$

También se pueden elevar potencia a números fraccionarios, por ejemplo:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{64}$$

Propiedades de los exponentes:

1. **Propiedad del producto**. Un mismo número x al multiplicarse con exponentes diferentes conserva la base y se suman los exponentes:	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. **Propiedad de la potencia de una potencia**. Un exponente de un número x elevado a otro exponente, es igual a la multiplicación de ambos exponentes:	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
3. **Propiedad del producto de dos números elevados a una misma potencia**. La multiplicación de dos números elevados a la misma potencia es igual a la multiplicación de esos números elevada a la potencia común:	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
4. **Propiedad del cociente de dos potencias** (donde el denominador es diferente de 0). La división de dos potencias con la misma base es lo mismo que la base elevada a la resta de los exponentes:	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
5. Propiedad de la potencia de un cociente (donde el denominador es diferente de 0). Una fracción en la que el numerador está elevado a una potencia y el denominador está elevado a la misma potencia, es lo mismo que la fracción elevada a esa potencia:	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
6. **Propiedad de la potencia cero**. Todo número diferente de 0, elevado a la potencia cero es igual a uno: $x^0 = 1$:	$a^0 = 1$
7. **Propiedad de la potencia uno**. Todo número elevado a la potencia uno es igual a sí mismo:	$a^1 = a$
8. **Propiedad del recíproco o inverso**. Todo número elevado a la potencia -n es igual al inverso de ese número a la potencia n:	$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

Radicación

Ahora requerimos hacer la operación inversa de la potencia, que es la raíz. Esto significa que si: $5^2 = 25$, $\sqrt{25} = 5$; y si $3^4 = 81$, $\sqrt[4]{81} = 3$

Los radicales también tienen otra notación: $(5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$; $(6)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$

Las raíces cuadradas de números enteros tienen dos posibles resultados, el valor positivo y el negativo. Por ejemplo, $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$ y también $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$.

Propiedades de la radicación

a) **Para n par, no está definida si x < 0, es decir, si x es negativo**
Ejemplo: $\sqrt{-36}$ no está definida para los números reales, porque **no existe un número real** que al multiplicarse por sí mismo tenga como resultado –36.

b) **Las raíces del cero son iguales a cero para cualquier n**: $\sqrt[n]{0} = 0$

c) **Las raíces impares de números positivos son positivas: n:** $\sqrt[3]{\mathbf{27}} = \mathbf{3}$

d) **Las raíces impares de números negativos son negativas:** $\sqrt[3]{\mathbf{-27}} = \mathbf{-3}$

Actividad 3

Responde según las indicaciones en cada ejercicio

1. Efectúa las operaciones de la izquierda, utilizando las propiedades de los exponentes racionales y une con una línea la respuesta correspondiente del lado derecho:

a) $81^{1/2}$	4
b) $8^{2/3}$	no está definida en los reales
c) $\sqrt{5 2^2}$	-2
d) $\sqrt[5]{-32}$	9
e) $\sqrt[4]{-625}$	0
f) $\sqrt{0}$	5

2. Realiza los cálculos siguientes considerando las reglas y propiedades que has estudiado

a) $\sqrt[5]{-243}$

b) $\sqrt{1}$

c) $121^{1/2}$

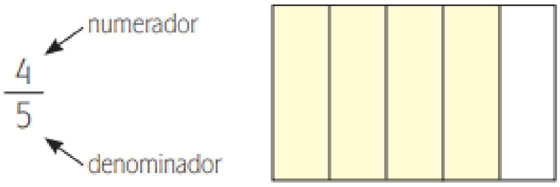
d) $\sqrt[3]{-343}$

e) $\sqrt[8]{100\,000\,000}$

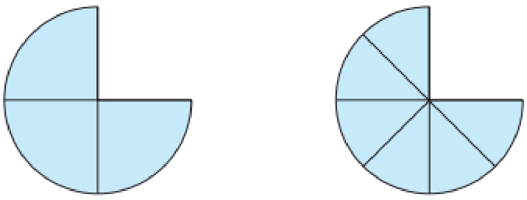
f) $16^{1/4}$

1.3 Operaciones con fracciones

Las fracciones se componen de numerador y denominador. El denominador representa la cantidad de partes en que se ha dividido la unidad, y el numerador es la cantidad que se toma de éstas.



Son fracciones equivalentes aquellas que tienen el mismo valor, aunque parezcan diferentes. Ejemplo: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$
Normalmente siempre se usa o se reduce a la mínima expresión, ya que es más fácil de usar.



Suma y resta de fracciones

La suma (o la resta) de fracciones con un denominador común, es un número racional cuyo numerador es la suma (o resta) de los numeradores y cuyo denominador es el denominador común. Ejemplo:

$$\frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \frac{8}{7} \; ; \; \frac{5}{4} - \frac{7}{4} = \frac{-2}{4}$$

Si no hay común denominador:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(a \cdot d)+(c \cdot b)}{b \cdot d} ; \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{(a \cdot d)-(c \cdot b)}{b \cdot d}$$

Multiplicación de fracciones

La multiplicación o producto de dos fracciones es otro número racional que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores:

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 6} = \frac{5}{16}$$

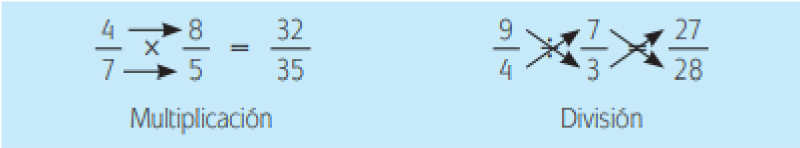
División de fracciones

La división de dos números racionales es otro número racional que tiene por numerador el producto del numerador del primero con el denominador del segundo, y por denominador el producto del denominador del primero con el numerador del segundo

Ejemplo:

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{5}=\frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 3}=\frac{10}{21}$$

Las flechas en la siguiente imagen te pueden ayudar a que no olvides cómo se efectúan la multiplicación y la división



Números mixtos

Es posible que en ocasiones encuentres números que constan tanto de una parte entera como de una fraccionaria. A un número como estos se le llama número mixto. Ejemplo: $3\frac{1}{5}$

Si se tiene $2\frac{3}{4}$ entonces en cada entero se tienen $\frac{4}{4}$ por lo tanto el número será $\frac{n}{4}$ donde n se obtiene: $n=(4 \cdot 2)+3=11$, entonces $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$

Potencia y raíz de fracciones

Para obtener la potencia de una fracción elevamos tanto el numerador como el denominador a esa potencia:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n}$$

Lo mismo se cumple para raíces si consideramos que n puede ser racional. También se cumple que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} \quad \frac{b^{n}}{a^{n}}$$

Dos **fracciones** son **equivalentes** si representan la misma cantidad, aunque el numerador y el denominador sean diferentes.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{20}{30}$$

Actividad 4

Siendo las fracciones representación de número que no llegan a formar un entero, resuelve los siguientes ejercicios.

1. Encierra en un cuadro todas las que sean fracciones equivalentes de $\frac{7}{9}$

a) $\frac{-4}{7}+\frac{2}{9}=$

b) $\frac{13}{8}x\frac{-6}{7}=$

c) $4\frac{1}{9}+\frac{-5}{3}=$

d) $\frac{-2}{3}+\left(\frac{-5}{2}\right)^{3}=$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=$

f) $\left(\frac{-2}{3}+\frac{-5}{2}\right)\div 2\frac{3}{5}=$

Divisibilidad

Cuando una cantidad se puede repartir de manera exacta entre otra, se dice que ésta es divisible entre la otra. Por ejemplo, 12 es divisible por 6 $(12 = 6 \cdot 2)$, por 4 $(12 = 4 \cdot 3)$, por 3 $(12 = 3 \cdot 4)$ y por 2 $(12 = 2 \cdot 6)$.

Divisores y múltiplos

A los números que son multiplicaciones de otros, se les conoce como **múltiplos**. Por lo tanto, los múltiplos de un número natural son los números que resultan de multiplicar ese número por otros números naturales. Por ejemplo, los múltiplos del 7 son: 7, 14, 21, 28…
Los **divisores** de un número natural son los números naturales que lo dividen. Por ejemplo, los divisores del 24 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24.

Actividad 5

Comprueba los conocimientos adquiridos en el tema, resolviendo los ejercicios que aparecen a continuación.

1. Completa lo siguiente. Entre que factores (números) son divisibles lo siguientes números.
    a. 20: ________________
    b. 60: ________________
    c. 490: ________________
    d. 125: ________________

e. 210:________________

f. 49:________________

g. 100:________________

Números primos

Los números **primos** son aquellos que solo son divisibles por sí mismos y por el 1. Ejemplos de números primos: 5, 13, 23,11, 2821

Números compuestos

Los números **compuestos** son los que tienen otros divisores además de sí mismos y la unidad. 44 es compuesto, ya que tiene al 1, 2, 4, 11, 22, y 44 como divisores.

Mínimo común múltiplo (MCM)

El mínimo común múltiplo (MCM) de dos o más números es el menor múltiplo común distinto de cero, es decir, es el número más pequeño que resulta de la multiplicación de cualquiera de los dos números. Ejemplo: El MCM de 24 y 36: Los múltiplos de 24 son: 24 (resultado de 24 × 1), 48 (de 24 × 2), **72** (de 24 × 3), 96 (de 24 × 4), etcétera. Los múltiplos de 36 son: 36 (producto de 36 × 1), **72** (de 36 × 2), 108 (36 × 3), etcétera. El número más pequeño, común a ambas listas de múltiplos es 72; por lo tanto: MCM (24, 36) = **72**

Máximo común divisor (MCD)

El máximo común divisor (MCD) de dos o más números es el número más grande posible que es divisor de todos ellos. Ejemplo: El MCD de 24 y 36: Los divisores de 24 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, **12** y 24 Los divisores de 36 son: 1, 2, 3, 4, 6, 9, **12**, 18 y 36 El número más grande que divide a ambos es 12, por lo tanto: MCD (24, 36) = **12**

Actividad 6

Encuentra el MCM y el MCD de acuerdo con las instrucciones que aparecen en cada grupo de números.

1. Encuentra el MCM

a) 40 y 90

b) 15, 18 y 24
c) 20, 36 y 60
d) 100 y 150

2. Encuentra el MCD
a) 75 y 90
b) 30, 36 y 48
c) 200 y 360
d) 100, 150 y 180

1.4 Ecuaciones y propiedades de la igualdad

Definición	Ecuaciones
Una ecuación es una igualdad algebraica en la cual aparecen letras (incógnitas) con valor desconocido.	

Con ciertos problemas se necesita determinar una cantidad desconocida: cuando queremos obtener la medida de un terreno, el costo de algún artículo, las cantidades en los ingredientes de una receta de cocina, etcétera. Para encontrar la cantidad buscada se requiere realizar una serie de operaciones, dependiendo del problema.

Este tipo de operaciones en las que se consideran cantidades desconocidas, se llaman **ecuaciones**.

Imagina la siguiente situación: Andrés piensa un número, lo multiplica por 5, luego le suma 1, después le saca raíz cuadrada, luego le resta 2. El resultado que obtiene es 4. ¿Qué número pensó Andrés? En este tipo de situaciones debemos hacer las operaciones de regreso para ir rastreando al número buscado. No conocemos el número, pero tenemos cierta información que nos permitirá encontrarlo.$? \rightarrow \times 5 \rightarrow +1 \rightarrow \sqrt{x} \rightarrow -2 \rightarrow = 4$

Para encontrarlo debemos partir del resultado e ir de regreso, haciendo las operaciones inversas. Por ejemplo, si lo último que hizo Andrés fue restarle 2 a un número y obtuvo 4, ese número debió ser 6, pues 6 – 2 = 4. Por lo tanto, empezamos sumando 2 al cuatro, y así seguimos con el resto de las operaciones. $4 + 2 = 6 \rightarrow 6^2 = 36 \rightarrow 36 - 1 = 35 \rightarrow 35 \div 5 = 7$. ¡Lo encontramos! El número que pensó Andrés es **7**

Ten en cuenta los siguientes pasos:

- Lee el problema cuidadosamente e identifica bien de qué se trata.
- Interpreta o plantea el problema como una expresión algebraica.
- Representa los valores desconocidos con variables.
- Simplifica y resuelve la ecuación planteada, iniciando por el resultado.
- Verifica tu respuesta.

Una ecuación es una igualdad en cuyos miembros hay letras y números relacionados por operaciones aritméticas. A las letras les llamamos **incógnitas,** y representan cantidades desconocidas.

Con el fin de encontrar los valores de las incógnitas en una ecuación, es necesario ir transformando la ecuación hasta que la incógnita quede de un lado y los números que se conocen del otro, pero sin alterar la igualdad.

Lenguaje algebraico

Es importante poder traducir del lenguaje natural al matemático para lograr precisión y claridad en la comunicación, resolver problemas de manera efectiva y modelar fenómenos del mundo real. Para hacerlo, simplemente se deben identificar los conceptos clave y utilizar símbolos y estructuras matemáticas para expresarlos.

Por ejemplo:

1. El triple de un número, sumado a 5, es igual a 17. ¿Cuál es ese número?
   $3x + 5 = 17$. Como podemos ver es el triple del número x, mas 5 y esto es igual a 17.
2. El doble de un número, menos 7, es igual a 15. ¿Cuál es ese número?
   $2x - 7 = 15$. El doble del número x, menos 7 es igual 15
3. Pasa la siguiente expresión a lenguaje natural: $x - \frac{1}{2}x = 10$
   Un numero menos la mitad de ese mismo número es igual a diez.

En la unidad de algebra se abordará más este tema.

Propiedades de la igualdad

1. Propiedad de la suma. Si a, b y c son números reales cualesquiera tales que a = b, entonces a + c = b + c

Sumar una cantidad de ambos lados de la ecuación permite pasar números de un lado a otro a partir de sumar los **inversos aditivos** de un número; el inverso aditivo de -327 es +327 y el inverso aditivo de +4 es -4.

Por ejemplo: $\mathrm{x} + 4 = 15$, como queremos eliminar el "+4" que está del lado izquierdo, únicamente agregamos un "-4" de los dos lados de la igualdad y resolvemos.

2. Propiedad de la multiplicación. Si $a, b\, y\, c$ son números reales cualesquiera tales que a = b, entonces $a \cdot c = b \cdot c$. Ejemplo: $3 + 2 = 4 + 1$, ambos lados de la ecuación son iguales a 5. Si se multiplica por 2 a los dos lados, ahora ambos serán iguales a 10. $(3 + 2) \cdot 2 = (4 + 1) \cdot 2$

Multiplicar una cantidad de ambos lados de la ecuación será útil para dejar sola a la incógnita cuando se encuentra dividida por un número. Si multiplicamos por el inverso multiplicativo de este número, dará 1.

Por ejemplo: $\frac{x}{5} = 6$, si se multiplica por 5 a ambos lados de la igualdad, $5 \cdot \frac{x}{5} = 5 \cdot 6$, entonces del lado izquierdo se está multiplicando por 5 y dividiendo entre 5, y eso es igual a 1. Por lo tanto, solo queda x, y del lado derecho se multiplican los números que ahí se encuentran, quedando la ecuación $x = 6 \cdot 5 = 30$

Ahora supongamos que no conoces la cantidad de dinero que gana María, sin embargo, sabes que la mitad de su salario la gasta en la colegiatura de su hijo y también sabes que la colegiatura es de $4600. ¿Cómo puedes conocer el salario de María? Como la mitad de su salario es 4600, entonces $\frac{x}{2} = 4600$ Aquí te conviene aplicar la propiedad de la multiplicación, pues si multiplicas por 2 de ambos lados la igualdad se mantiene y te quedaría la siguiente ecuación: $\left(\frac{x}{2}\right) \cdot 2 = 4600 \cdot 2 = 9200$, el caso de la x, si la multiplico por 2 y se está dividiendo entre 2 me da como resultado la misma x, pues sabemos que $\frac{2}{2} = 1$ y ello no altera la igualdad. Por eso decimos que es un **neutro multiplicativo**.

Entonces tendremos que ella gana $9200.

3. Propiedad de la división. Si a, b y c son números reales cualesquiera tales que $\mathrm{a} = \mathrm{b}$, y $\mathrm{c} \neq 0$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$. Ejemplo: $3 + 2 = 4 + 1$, ambos lados de la ecuación son iguales a 5. Al dividir por 2 de los dos lados, $\frac{3+2}{2} = \frac{4+1}{2}$, ahora ambos son iguales a 2.5.
Dividir una cantidad de ambos lados de la ecuación ayudará para dejar sola a la incógnita cuando se encuentra multiplicada por un número. Al dividir por el **inverso multiplicativo** de este número, se obtiene 1 y de nuevo $x \cdot 1 = x$. Por ejemplo, en la ecuación: $7x = 35$, al dividir entre 7 de ambos lados de la ecuación, se tiene $\frac{7x}{7} = \frac{35}{7}$; del lado izquierdo $\frac{7}{7} = 1$ y queda la x sola, del lado derecho se hace la división y queda entonces $x = 5$

Ejemplo 2. Ángel le dijo a Claudia, "Compré 3 kilos de chocolate más $54 de leche y gasté $267. ¿Cuánto cuesta el kilo de chocolate?" El precio del chocolate es la incógnita, que expresamos con una x. Como compró 3 kilos entonces tenemos 3 veces x, más los $54 de la leche, lo que dio un total de 267. Por lo tanto, la ecuación que representa al problema es: $3x + 54 = 267$.
utilizando la propiedad de la suma y la de la división se tiene que sumando –54 de ambos lados de la igualdad $3x + 54 - 54 = 267 - 54$, queda $3x = 267$. Ahora aplicamos la propiedad de la división, dividiendo entre 3 de ambos lados $\frac{3x}{3} = \frac{213}{3}$ entonces queda $x = 71$
El kilo de chocolate costó $71.

4. Propiedad de la potencia. Si a, y b son números reales cualesquiera tales que $\mathrm{a} = \mathrm{b}$, entonces $a^n = b^n$. Ejemplo: $3 + 2 = 4 + 1$, ambos lados de la ecuación son iguales a *5*. Si se eleva al cuadrado de los dos lados, ahora ambos son iguales a 25, $(3 + 2)^2 = (4 + 1)^2$
Otro ejemplo$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = 5^3$. Del lado izquierdo obtiene x, y del lado derecho se resuelve la operación: x =125.

5. **Propiedad de la raíz.** Si *a, y b* son números reales cualesquiera tales que $a = b$, entonces $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$. Ejemplo: $3 + 2 = 4 + 1$, ambos lados de la ecuación son iguales a 5. Si se obtiene la raíz cuadrada de los dos lados $\sqrt{3+2} = \sqrt{4+1}$, ahora ambos son iguales a 2.236067…

Actividad 7

Resuelve las ecuaciones de una incógnita.

1. Encuentra el valor de la incógnita utilizando la propiedad de la suma.
A. $x + 8 = 15$

B. $x - 9 = -3$

C. $x - \frac{7}{4} = \frac{17}{8}$

D. $x - 14 = 17$

E. El triple de la edad de Jorge es igual a la edad de su padre; si su padre tiene 48 años, ¿qué edad tiene Jorge?

2. Encuentra la incógnita utilizando la propiedad de la multiplicación

a) $5x = 15$

b) $\frac{1}{4}x = 13$

c) $\frac{2}{3}x = 8$

d) Supongamos que el área de un cuadrado es de 36 m^2, ¿cuánto medirá su perímetro?

3. Encuentra la incógnita utilizando las propiedades de la potencia y de la raíz.

a) $x^3 = 216$

b) $\sqrt[4]{x} = 5$

c) $\sqrt[4]{x^2} = 2$

Razones y proporciones

	Definición	Razón
Una razón entre dos cantidades es una comparación entre éstas con el fin de determinar cuántas veces cabe una en la otra, y se obtiene al dividir una cantidad entre la otra.		

Ejemplo $\frac{6}{3} = 2$ y el resultado me indica que 6 es 2 veces mayor que 3; o que 3 cabe 2 veces en 6 o, si divido $3 \div 6 = \frac{1}{2}$ el resultado me indica que 3 es la mitad de 6.

Si en un salón de clase hay 12 hombres y 18 mujeres, entonces la razón de hombres a mujeres es: $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$, esto significa que por cada 2 hombres hay 3 mujeres. También se escribe de la siguiente manera: 2: 3 y se lee “la razón de hombres a mujeres es 2 a 3”

Cuando dos razones son iguales, aunque tengan diferentes números, tendremos una **proporción**.

Proporciones

	Definición	Proporción
Es una igualdad entre dos magnitudes medibles o razones.		

Por ejemplo, la razón de *7: 5* es igual que la de *21: 15,* por lo tanto $\frac{7}{5} = \frac{21}{15}$. La expresión anterior es una proporción y se lee “7 es a 5 como 21 es a 15”

En una proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, se llama extremos a las cantidades a y d; se denomina medios a las cantidades b y c.

Ejemplo: $\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$= y se cumple que $4\cdot 15=60;\ 5\cdot 12=60$

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces se cumple que $ad=bc$

Otras propiedades son:

1. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces se cumple que $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

Ejemplo:

$\frac{3}{4}=\frac{12}{16}$ entonces $\frac{3}{12}=\frac{4}{16}$

2. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces se cumple que $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

Ejemplo

$\frac{7}{4}=\frac{14}{8}$, intercambiando numeradores con denominadores, también es cierto que $\frac{4}{7}=\frac{8}{14}$

3. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces se cumple que $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

Ejemplo:

$\frac{9}{5}=\frac{36}{20}$ y se mantienen los mismos denominadores (5 y 20 respectivamente) pero al numerador se le suma el denominador de ambas fracciones y el resultado se deja en el numerador ($9+5=14\ y\ 36+20=56$ respectivamente), también se cumple que $\frac{14}{5}=\frac{56}{20}$

4. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces se cumple que $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

Ejemplo: $\frac{28}{21}=\frac{4}{3}$, manteniendo los denominadores (221 y 3 respectivamente) pero restando los denominadores a lo numeradores $(28-21=7\ y\ 4-3=1)$ también se cumple que $\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$

5. Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces se cumple que $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

Ejemplo $\frac{5}{2}=\frac{15}{6}$ sumando numerador y denominador de ambas fracciones y el resultado lo dejamos en el numerador ($5\ +\ 2\ =\ 7\,y\,15+6=21$ respectivamente) restamos numerador y denominador de ambas fracciones y el resultado lo dejamos en el denominador (5 – 3 = 2 y 15 – 6 = 9 respectivamente), también se cumple que $\frac{7}{3}=\frac{21}{9}$

Actividad 8

Resuelve los siguientes problemas utilizando proporciones.

1. Un coche gasta 15 litros de gasolina en 180 kilómetros, ¿cuántos kilómetros recorrerá con 24 litros?

2. Un grifo vierte 8 litros de agua en una hora, ¿cuántos litros verterá en 25 minutos?

3. En un mapa hecho a escala, 2 cm representan 100 km. Si en el mapa dos ciudades se encuentran a 5 cm de distancia, ¿a qué distancia real se encuentran entre sí?

Porcentaje

	Definición	Porcentaje
Es la forma de expresar un número como una fracción que tiene como denominador el número 100.		

Si dividimos un total en cien partes iguales y tomamos x cantidad de esas cien partes, a eso lo llamamos x%, que se lee "x *por ciento*". Por ejemplo, si de 300 libros que hay en la biblioteca, has leído 15 libros, entonces ya leíste el 5% de los libros de la biblioteca

$$\frac{300}{15}=\frac{100}{x}, \text{ despejando } x\ \frac{100 \text{ x } 15}{300}=\frac{1500}{300}=\frac{15}{3}=5\%$$

Para resolver problemas con porcentajes se requiere encontrar el número que falta en una proporción en la que una de las razones contiene a 100.

Actividad 9

¿Te queda claro cómo calcular el porcentaje? ¡Realiza los siguientes ejercicios para corroborarlo!

a. De los 1200 estudiantes de una preparatoria, 800 han ido al museo de ciencia, ¿qué porcentaje de estudiantes ha ido al museo?

b. Una televisión cuyo precio el año pasado era $4000 cuesta en la actualidad $200 más, ¿cuál es el porcentaje de incremento del precio?

c. Alberto gana $13500 actualmente, ¿cuánto ganaría si su salario se incrementara un 7%?

Autoevaluación (Unidad 1)

Problema 1. Una pared rectangular tiene un perímetro de 24 metros. El largo (l) de la pared es el doble del alto (a). ¿Cuántos litros de pintura se necesitan para pintar la pared, si se utiliza 1 litro de pintura por cada 5 metros cuadrados de pared?

I. ¿Cuál es la solución para el problema?

a) 8.2 b) 3.2 c) 6.4 d) 2.4

II. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones puede representar algebraicamente este problema?

a) $6a = 24$ b) $8a + 2l = 24$ c) $6a + 5 = 24$ d) $4a + 3l = 24$

III. ¿Cómo puede escribirse la relación de proporcionalidad que existe entre la pared y los litros de pintura que se necesitan para pintarla?

a) $\frac{5}{32} = \frac{x}{1}$ b) $\frac{5}{32} = \frac{1}{x}$ c) $\frac{5}{24} = \frac{1}{x}$ $\frac{5}{24} = \frac{x}{1}$

Problema 2. En un expendio de café se quiere vender una mezcla que cueste $12 por kilogramo y que combine dos tipos de grano: el arábico, que cuesta $10 por kilogramo y el robusto, que cuesta $15. ¿Cuántos kilogramos de café de cada tipo se deben mezclar para obtener, a ese costo, 50 kilogramos de dicha mezcla?

I. ¿Cuáles son las cantidades desconocidas en el problema?

a) costo del kilogramo de arábico y de robusto que llevará la mezcla
b) costo de 50 kilogramos de café de arábico y de robusto
c) peso en kilogramos de la mezcla de arábico y de robusto por $12
d) cantidad en kilogramos de arábico y de robusto que llevará la mezcla

II. ¿Qué propiedades de la igualdad utilizas para resolver las ecuaciones del problema anterior?
a) propiedad de la potencia y de la resta
b) propiedad de la raíz y de la multiplicación
c) propiedad de la resta y de la división
d) propiedad de la división y de la raíz

3. ¿En cuánto debo vender un terreno si quiero obtener una ganancia del 15% sobre el precio de costo, y lo compré en $380,000?

I. ¿Cuál es la solución al problema?

a) $\$435{,}000$ b) $\$437{,}000$ c) $\$438{,}000$ d) $\$439{,}000$

II. En el problema anterior, ¿cuál quiero que sea la razón, en porcentaje, entre el costo y el precio de venta, ya con la ganancia?

a) $\frac{85}{100}$ b) $\frac{15}{100}$ c) $\frac{115}{100}$ d) $\frac{115}{85}$

III. ¿Qué ecuación expresa la relación de proporcionalidad entre el costo y la ganancia?

a) $x = \frac{115\ (38000)}{100}$ b) $= \frac{85\ (38000)}{100}$ c) $= \frac{100\ (38000)}{115}$ d) $= \frac{100\ (38000)}{85}$

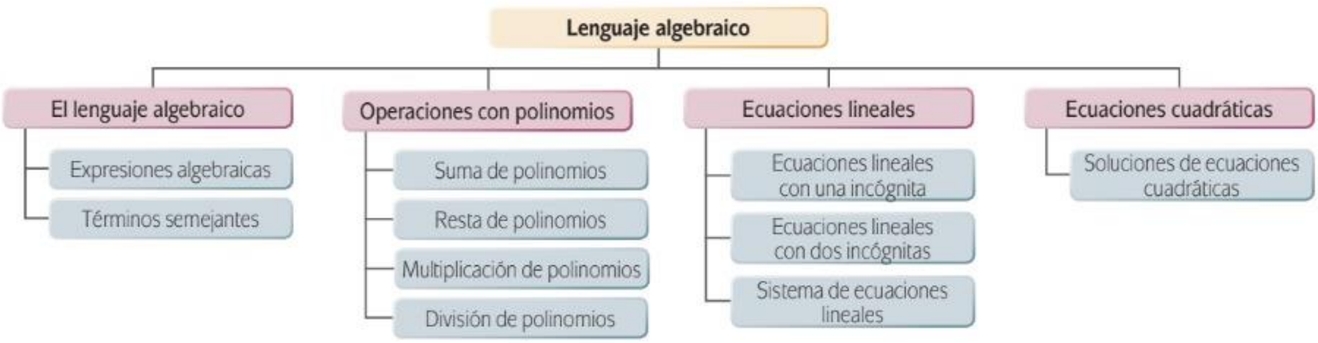
Unidad 2

Algebra y Lenguaje Algebraico

¿Qué voy a aprender y cómo?

En ocasiones, hay problemas que involucran cantidades desconocidas y en los que la aritmética resulta insuficiente. ¿Cómo enfrentar esos problemas cuando se tienen cantidades conocidas y desconocidas? Mediante el álgebra, la parte de la matemática que estudia las estructuras, las relaciones y las cantidades y que se encarga de operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división) utilizando símbolos (a, x, y) en lugar de números (1, 2, 9). El uso de símbolos permite hacer referencia a números desconocidos (incógnitas), lo que posibilita el desarrollo de ecuaciones y el análisis correspondiente a su resolución. De este modo se pueden utilizar expresiones algebraicas para resolver una gama más amplia de situaciones problemáticas

El eje de tu trabajo es el análisis y la solución de problemas diversos con el álgebra. En primer lugar, aprenderás a manejar el lenguaje algebraico y a formular expresiones algebraicas, de tal manera que puedas convertir con facilidad el lenguaje común a algebraico y viceversa.



2.1 Álgebra

	Definición	Álgebra
El álgebra es la rama de la matemática que estudia la combinación de elementos como números, letras y signos para elaborar diferentes operaciones aritméticas elementales.		

En álgebra, a los datos desconocidos que se involucran en los problemas se les conoce como incógnitas y se expresan dentro de las operaciones mediante letras o **literales**. Para solucionar situaciones problemáticas, además de entender el lenguaje algebraico se necesita aprender a generar y manipular expresiones algebraicas. Suena complicado, ¿no es así? Sin embargo, no lo es tanto, como podrás comprobarlo en el estudio de esta unidad. Además, no debes perder de vista que el lenguaje y las expresiones algebraicas pueden serte de utilidad para comprender y solucionar cuestiones cotidianas.

Lenguaje algebraico

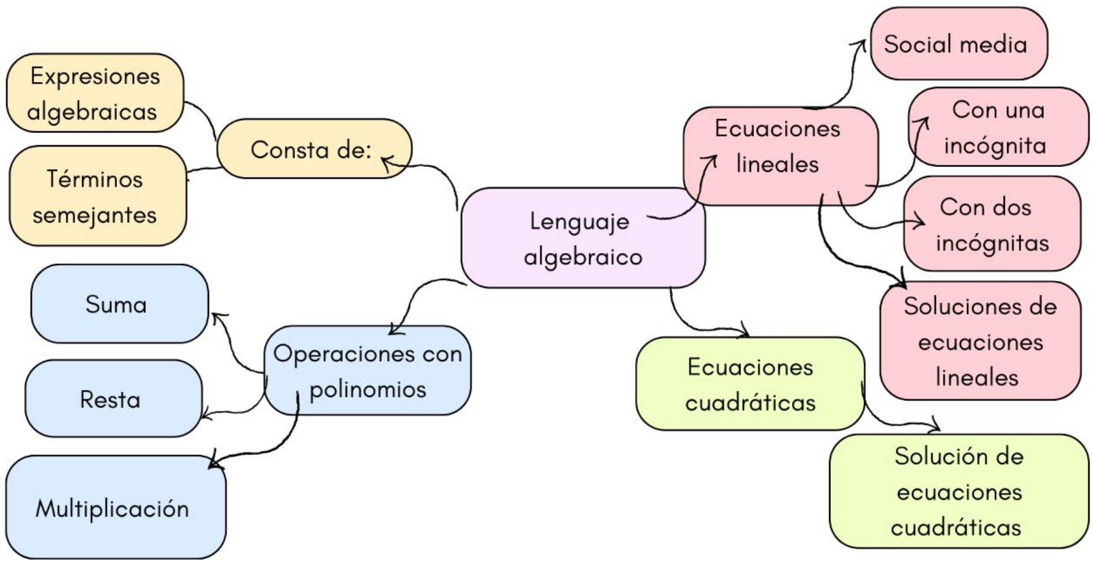
	Definición	Lenguaje algebraico
El lenguaje algebraico es una forma de traducir a símbolos y números lo que normalmente conocemos como lenguaje natural, de esta forma se pueden manipular cantidades desconocidas con símbolos fáciles de escribir, lo que permite simplificar expresiones, formular ecuaciones y permite el estudio de cómo resolverlas.		

Para poder manejar el lenguaje algebraico es necesario comprender lo siguiente:

- Se usan todas las letras del alfabeto.
- Las primeras letras del alfabeto se determinan por regla general como constantes, es decir, cualquier número o constante como el vocablo *pi*.

Por lo regular las letras "**x**", "**y**" & "**z**" se utilizan como las incógnitas o variables de la función o expresión algebraica.

A continuación, encontrarás las aplicaciones del lenguaje algebraico.



Los siguientes son ejemplos de las expresiones algebraicas más usadas, en forma verbal y escrita:

Lenguaje natural	Lenguaje algebraico
Un número cualquiera	x
El doble de un número	$2x$
El triple de un número	$3x$
La suma de dos números diferentes	$x + y$
La diferencia de dos números	$x - y$
El producto de dos números diferentes	$x * y$
El cociente de dos números	x/y
La suma de los cuadrados de dos números	$x^2 + y^2$
El cubo de un número	x^3
La diferencia entre un número y su anterior	$x - (x - 1)$
El triple del cuadrado de un número	$3x^3$

Actividad 1

De acuerdo con las siguientes expresiones, relaciona con el lenguaje natural que corresponda

$x - 7$	$2x + 4$	$11 - 3x$
$3x + \frac{x}{4}$	$(x + 6)^{\wedge 3}$	$2(x + 4)$ $x + (x + 1)$
$x + (x + 1)$	$\frac{x^2}{3}$	

El doble de un número más cuatro	El doble de la suma de un número más cuatro	La tercera parte del cuadrado de un número	Un número menos siete

El cubo de la suma de un número más seis	El triple de un número más su cuarta parte	El número once menos el triple de un número	La suma de dos números consecutivos

Actividad 2

Expresa en lenguaje algebraico de acuerdo con las situaciones cotidianas.

1. Años de Ana Belén dentro de 12 años

____

2. La cuarta parte de un número más su siguiente.

____

3. Perímetro de un cuadrado.

____

4. La edad de una señora es el doble de la de su hijo menos 5 años

____

5. Antonio tiene 20 euros más que Juan

____

6. Número de ovejas después de nacer 18 corderitos

____

2.2 Expresiones algebraicas

El lenguaje algebraico es el que permite expresar las relaciones matemáticas. Estás trabajando para expresar algebraicamente las situaciones problemáticas que se te presentan usando tu sentido analítico al relacionar las variables.

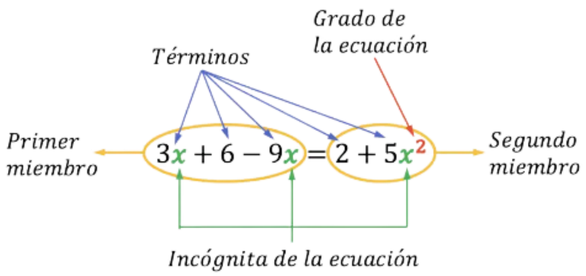
	Definición	Expresión algebraica
Una expresión algebraica es una combinación de letras y números unidos por medio de las operaciones: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación, de manera finita.		

- Las características de una expresión algebraica son:

Elemento	Descripción
Variable	Letra que se utiliza para representar un número desconocida
Coeficiente	Son los números de los términos algebraicos y pueden tener signo positivo o negativo
Operadores	Son los signos que indican que operación realizar
Exponente	Son potencias que indican que un número ha sido multiplicado por sí mismo varias veces
Paréntesis	Se usan para agrupar términos.

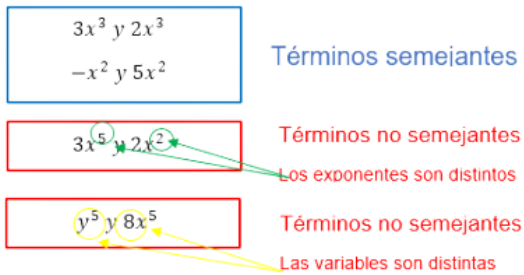
● Término y grado de una expresión algebraica

Una expresión algebraica se forma a partir de términos algebraicos separados entre sí por los signos de + y –.



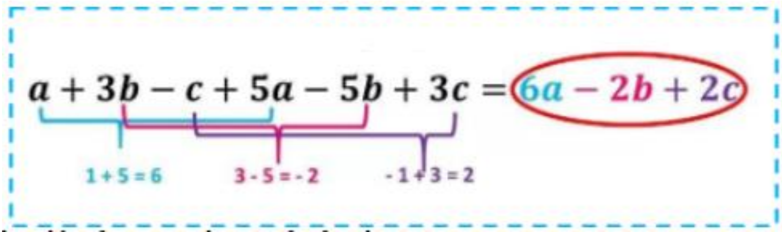
Elemento	Descripción
Término	Son los monomios que forman cada uno de los miembros de la ecuación
Grado	Dado por el exponente mayor de la incógnita.

En una expresión algebraica se presentan términos semejantes, es decir que tienen la misma parte literal o las mismas letras, por lo que se hace una reducción de términos semejantes para mayor facilidad al resolver expresiones algebraicas



● Reducción de términos semejantes

Consiste en sumar o restar términos con igual factor literal y exponencial.



● Clasificación de expresiones algebraicas.

De acuerdo con los términos de una expresión algebraica tiene su clasificación correspondiente:

Clasificación	
Monomio	Son aquellas expresiones que poseen **un solo término** algebraico
Binomio	S n aquellas formadas por **dos términos** algebraicos por las operaciones de sumas o restas (+ ó –)
Trinomio	Son aquellas formadas por **tres términos** algebraicos
Polinomio	Un polinomio es la suma algebraica de dos o más monomios. A cada monomio del polinomio se le llama término

EJEMPLO

¿Cuántos términos tiene la siguiente expresión algebraica? $4x^{2} + 3y$
Solución: 2 términos y tiene grado 2

Se determina el grado absoluto de acuerdo con el exponente mayor, de uno de sus términos

a) $a^{4} - 5a^{3} + 7a^{2} + 3a + 1$ El grado absoluto es 4
b)$2x^{5} + 6x^{3}y^{5} + 2x^{2}y^{6} - 4x$ El grado absoluto es 6
c)$2ab - 2b^{3} + 3a^{3}b^{3} + 5b^{5}$ El grado absoluto es 5

Sumar $(x^{3} + 3x^{2}y - 4x^{2}y^{3}) + (-4x^{3} + 2x^{2}y + 5x^{2}y^{3}) =$
Solución: Se eliminan los símbolos de agrupación y se procede a reducir términos semejantes
$x^{3} + 3x^{2}y - 4x^{2}y^{3} - 4x^{3} + 2x^{2}y + 5x^{2}y^{3} = -3x^{3} + x^{2}y^{3} + 5x^{2}y$
Ordenar exponentes:
$-3x3 + x2y3 + 5x2y$

Para restar dos o más expresiones algebraicas se suprimen los símbolos de agrupación haciendo la operación correspondiente de signos en el caso que corresponda, enseguida se reducen los términos semejantes.

Restar: $(7x^2y - 3xy + 2y^2) - ((-3x)^3 + 9x^2y + 6xy - y^2)$
Solución: Al eliminar los paréntesis se debe hacer la operación de signos correspondiente:
$7x^2y - 3xy + 2y^2 + 3x^3 - 9x^2y - 6xy + y^2 = -2x^2y - 9xy + 3y^2 + 3x^3$

Actividad 3

Resuelve adecuadamente cada uno de los siguientes ejercicios sobre los elementos de una ecuación

1. Desglosa cada uno de los términos algebraicos según los elementos que lo componen, y completa la tabla

Monomio	Coeficiente	Variable	Grado
$4x^5$			
$\frac{xy}{2}$			
$-x$			
$\frac{2}{3}x^2yz$			

2. Une con una línea los términos que sean semejantes

$5a^2$	$9b^1$
$7x^3y^4$	$15x^2 y^2$
$9w^2$	a^2
$2x^2 y^2$	$x^3 y^4$
$10b^1$	$8w^2$

3. Reduce las siguientes expresiones de acuerdo con sus términos semejantes

a) 3m – 7m + 2m ________________________________

b) 12x – 5x – 8x ________________________________

c) 12m – 6m - m ________________________________

d) $12x^2 + 3x^2 - 6y^2 - 5y$ ________________________________

e) $8y^2 + 9y^2 - 38x$ ________________________________

f) 10a – 5a + 3a ________________________________

g) $10x^5 + 5x^2 - x^2$ ________________________________

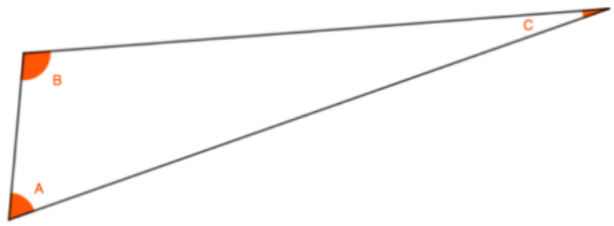
h) $9y^4 + 5y^4 - x^2 + 5x^2$ ________________________________

4. Lee el siguiente problema, identifica y escribe los datos y el cuestionamiento. Intenta traducirlo a lenguaje algebraico sin resolverlo (solo plantear la expresión algebraica).

a) Carmen fue a la paletería y compró cuatro paletas y un litro de helado que le costaron \$55; si pagó \$103 en total, ¿cuál es el precio de una paleta?

b) Jaime y Eduardo ahorraron juntos 520 pesos. Si Jaime tiene 52 pesos más que su hermano, ¿cuánto ahorró Eduardo?

c) Considerando un triángulo en donde el ángulo B mide 40 grados más que el ángulo A, y el ángulo C mide 12 grados. ¿Cuánto mide el ángulo A?



4) ¿Cuál es la edad de Jimena si su papá tiene 27 años más que ella y su mamá tiene 34 años? Además, se sabe que la suma de las tres edades es igual a la diferencia de 10 veces la edad de Jimena, menos de 3 años.

2.3 Polinomios

	Definición	Polinomios
Un polinomio es la suma de un número finito de términos. Pueden ser ya sea monomios en caso de un solo término, binomio s en caso de dos, y así sucesivamente.		

Existen diversos tipos de polinomios: monomios, binomios, trinomios, etcétera.

- Un monomio es un polinomio que consta de un solo término, por ejemplo: $5x^4y$.
- Un binomio es el que consta de dos términos, por ejemplo: $7a – 3b^3$.
- Un trinomio consta de tres términos, por ejemplo: $a^4 – 3x^2 + 8$.

El resto de los polinomios se caracterizan por el número de términos que lo componen; así existen polinomios de cuatro términos, de cinco términos, etcétera. Con los polinomios se pueden realizar las mismas operaciones que con los números reales: suma, resta, multiplicación y división.

Para las operaciones con polinomios es importante conocer el grado de una ecuación, y para determinar el grado de una ecuación, primero hay que eliminar cualquier paréntesis usando la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma y la resta.

Por ejemplo, la ecuación: $(x+2)(x+3)=0$

La ecuación en este caso tiene un grado 2, utilizando la propiedad distributiva y multiplicando sobre la suma y resta quedaría así la ecuación $x^2+5x+6=0$

Ahora está más claro que la ecuación es de grado 2 ya que el grado de un término, por ejemplo, en el término 3 x 2. Es solamente una variable en el término: x. El exponente de x es 2, el término tiene 3 x 2, por lo tanto, su grado es 2.

Operaciones con polinomios

Suma

La suma algebraica de monomios y polinomios es una operación que permite juntar o reunir dos o más expresiones algebraicas en una sola expresión. En la suma de expresiones algebraicas se busca reducir los términos semejantes si es posible.

$(2x^3 + 3x^2 - 4x + 5) + (3x^3 - x^2 + 2x - 3)$

Sumas los coeficientes con exponentes iguales

$(2x^3 + 3x^3) + (3x^2 - x^2) + (-4x + 2x) + (5 - 3)$

Combinas

$5x^3 + 2x^2 - 2x + 2$

Resta

Para restar dos o más polinomios restamos de la primera expresión (minuendo) cada uno de los términos de la segunda expresión (sustraendo). Para hacerlo, primero debemos anotar el minuendo y, a continuación, escribiremos el sustraendo cambiándole el signo a todos sus términos; después reducimos términos semejantes.

$(2x^3 + 3x^2 - 4x + 5) - (3x^3 - x^2 + 2x - 3)$

Resta los coeficientes de los términos similares

$(2x^3 - 3x^3) + (3x^2 - (-x^2)) + (-4x - 2x) + (5 - (-3))$

Combina

$-x^3 + 4x^2 - 6x + 8$

Multiplicación

a. Monomios con monomios

Se multiplican los coeficientes y las literales respetando las leyes de los signos y las leyes de los exponentes. Por ejemplo:

$$(5a^2b^5)(7ab^2) = (5 \cdot 7)(a^{2+1} \cdot b^{5+2}) = 35a^3b^7$$

b. Monomios o polinomios con polinomios

Se multiplican mediante la utilización de la propiedad distributiva y las reglas para la multiplicación de monomios con monomios (leyes de signos y exponentes).

$$(5x - 3y)(7a^2 + 4a - 2) = (5x)(7a^2 + 4a - 2) + (-3y)\ (7a^2 + 4a - 2)$$
$$35a^2x + 20ax - 10x - 21a^2y - 12ay + 6y$$

División

a. División de un monomio entre un monomio.

Para dividir un monomio entre otro, se dividen los coeficientes numéricos y se aplican las leyes de los exponentes:

$$\frac{10x^6}{2x^3} = \left(\frac{10}{2}\right)x^{6-3} = 5x^3$$

b. División de un polinomio entre un monomio.

Para dividir un polinomio entre un monomio se aplica la propiedad distributiva y se divide cada término entre el monomio.

$$\frac{12a^4 + 16a^2 - 8a}{4a} = \left(\frac{12a^4}{4a}\right) + \left(\frac{16a^2}{4a}\right) - \left(\frac{8a}{4a}\right) = 3a^3 + 4a - 2$$

Actividad 4

Sigue las instrucciones para cada sección de ejercicios sobre polinomios.

1. Indica cuáles de las siguientes expresiones son monomios. En caso de que sean, indica su grado y coeficiente.

$13x^3$ ____________________ $\sqrt{2x}$ ____________________

$25x^{-3}$ ____________________ $\frac{3}{4}\ x^2$ ____________________

$33x + 1$ ____________________ $2\sqrt{x}$ ____________________

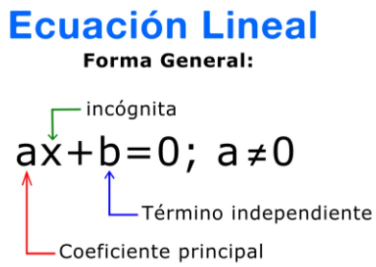
2. Efectúa las siguientes operaciones con monomios:
   a. $2x^3 - 5x^3 =$
   b. $3x^4 - 2x^4 + 7x^4 =$
   c. $(2x^3) \cdot (5x^3) =$
   d. $(2x^3y^2) \cdot (5x^3yz^2) =$
   e. $(12x^3) \cdot (4x) =$
   f. $(18x^3y^2z^5) \cdot (6x^3yz^2) =$
   g. $(2x^2y^2)^3 =$
   h. $(2x^3y^2z^2)^3 =$

2.4 Ecuaciones lineales

	Definición	Ecuaciones lineales
Una ecuación de primer grado o lineal es una igualdad que involucra una o más variables a la primera potencia y no contiene productos entre las variables, es decir, una ecuación que involucra solamente sumas y restas de una variable a la primera potencia, este tipo de ecuaciones se caracterizan por formar una **línea recta** al momento de ser graficadas en un plano cartesiano.		

Una Ecuación Lineal con una incógnita o simple está compuesta en esencia por 3 elementos.

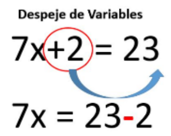
- Coeficiente Principal.
- Una Variable o Incógnita.
- Termino independiente.



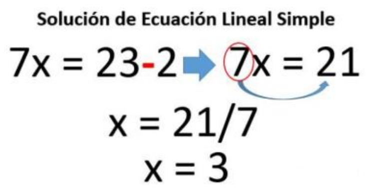
Pasos para resolver una ecuación lineal con una incógnita

1

2



3



En general para resolver una ecuación lineal o de primer grado debemos seguir los siguientes pasos:

I. Eliminar paréntesis tomando en cuenta la propiedad distributiva, esto es $a(b+c) = ab + ac$ y también la ley de los signos.

$$3(x-8)+6(2-x)-(x-2)=x \qquad \Rightarrow \qquad 3x-24+12-6x-x+2=x$$

II. Eliminar denominadores

Calcular el mínimo común múltiplo (m.c.m) de estos y multiplicar la ecuación por el m.c.m.

O en vez del m.c.m, también puedes calcular el producto de todos los denominadores, aunque se recomienda más el primero, pues es un número más pequeño o simplificado. Por ejemplo:

$$\frac{x-10}{2}+\frac{x+8}{4}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{mcm}(2,4)=4$$

Y multiplicando la primera fracción por $\frac{2}{2}$:

$$\frac{2(x-10)}{4}+\frac{(x+8)}{4}=0 \qquad \Rightarrow \qquad 2(x-10)+(x+8)=0\cdot 4$$

Eliminando nuevamente paréntesis para simplificar:

$$2x - 20 + x + 8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 3x + 12 = 0$$

III. Agrupar los términos en x en un miembro y los términos independientes en el otro

Ya que hayamos hecho el paso 1 y paso 2, tendremos la suma y resta de términos con x y términos independientes de ambos lados de la ecuación, lo que sigue es juntar las x de un lado y los términos independientes del otro, para esto recuerda que si de un lado de la ecuación se está sumando un $2x$, por ejemplo, lo puedo pasar del otro lado con la operación inversa, es decir, quedaría $-2x$ del otro lado.

$$8x - 64 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 8x = 64$$

$$10x + 12 = 7x + 33 \qquad \Rightarrow \qquad 10x - 7x = 33 - 12$$

IV. **Reducir los términos semejantes**

Ya que se tenga términos con x juntos, se suma o resta según sea el caso. De igual manera con los términos independientes, por ejemplo:

$$10x - 7x = 33 - 12 \qquad \Rightarrow \qquad 3x = 21$$

$$9x - 3x + 2x + x = 5 + 27 + 54 - 12 + 7 \qquad \Rightarrow \qquad 9x = 81$$

V. Se despeja la incógnita

Si hay un coeficiente acompañando a la variable x, como la está multiplicando se pasa del otro lado con la operación inversa, esto es, dividiendo. Esto es, se despeja.

$$9x = 81 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{81}{9} \qquad \Rightarrow \qquad x = 9$$

Actividad 5

Resuelve las siguientes ecuaciones de una incógnita

a) $x + 5 = 10$

b) $5x = 25$

c) $7 - x = 3$

d) $x/2 = 4$

e) $x - 6 = -2$

f) $3x = 18$

g) $x + 8 = 15$

h) $4x = 16$

i) $x/3 = 6$

j) $x - 9 = 0$

Ecuaciones lineales con dos incógnitas.

	Definición	Ecuaciones con dos incógnitas
Un sistema de ecuaciones simultáneas con dos incógnitas es un conjunto de dos ecuaciones donde cada una de esas dos involucra dos parámetros desconocidos o incógnitas, donde el valor que se le asigne a cada incógnita en una ecuación es el mismo que se le deberá asignar en la otra ecuación.		

Para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas con dos incógnitas, el procedimiento a seguir es eliminar una de las dos incógnitas utilizando las dos ecuaciones y obtener así una sola ecuación que involucre una sola incógnita. Para eliminar una de las dos incógnitas, se pueden utilizar los métodos:

- De Sustitución
- De igualación
- De Reducción

Identificar ecuaciones con dos incógnitas a partir de gráficos implica encontrar la relación matemática entre dos variables representadas en el gráfico. La ecuación puede ser una ecuación lineal o no lineal, dependiendo de la naturaleza de la relación entre las variables. Aquí están los pasos para identificar una ecuación con dos incógnitas a partir de un gráfico:

1. Observa la forma del gráfico y determina si la relación entre las dos variables es lineal o no lineal. Si la relación es lineal, la ecuación será de la forma $y = mx + b$, donde m es la pendiente y b es el punto de intercepción en y.

2. Si la relación es no lineal, busca un patrón en los puntos del gráfico que pueda describir la ecuación. Por ejemplo, si el gráfico muestra una parábola, la ecuación será de la forma $y = ax\text{^}2 + bx + c$, donde a, b y c son constantes.

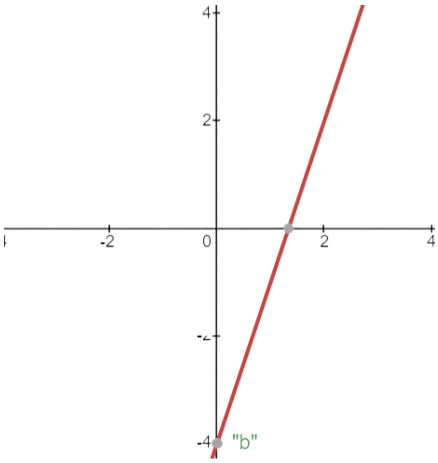
3. Una vez que hayas determinado la forma general de la ecuación, utiliza tres o más puntos en el gráfico para determinar los valores exactos de los coeficientes. Por ejemplo, si tienes un gráfico de una recta, elige tres puntos en la recta y usa esos puntos para determinar los valores de m y b en la ecuación $y = mx + b$.

4. Verifica que la ecuación que has encontrado realmente describa el gráfico. Puedes hacer esto planteando la ecuación en una hoja de cálculo o en una herramienta de gráficos y asegurándote de que los puntos generados por la ecuación coinciden con los puntos en el gráfico original. En resumen, identificar ecuaciones con dos incógnitas a partir de gráficos implica observar la forma del gráfico, determinar la forma general de la ecuación, usar puntos en el gráfico para determinar los coeficientes exactos y verificar que la ecuación realmente describa el gráfico.

Plano cartesiano y como representar la recta.

	Definición	Plano cartesiano
El plano cartesiano es un sistema de coordenadas bidimensional que se utiliza para representar y visualizar puntos en el espacio. El punto de intersección de ambos ejes se llama origen. Los puntos en el plano cartesiano se representan mediante pares ordenados (x, y), donde “x” indica la posición horizontal y “y” indica la posición vertical del punto.		

Como ya vimos las ecuaciones lineales se escriben de la forma: $y = mx + b$. La representación gráfica de esta ecuación es representada en el plano cartesiano, donde m es la pendiente (indica el cambio que tendrá la ecuación tanto en el eje x como el eje y) y “b” es la intercepción que tiene la recta al pasar por el eje y. Como se muestra en la siguiente imagen.



En la imagen anterior tenemos representada la recta: $y = 3x - 4$

Ejercicio.

1. Estudia el procedimiento para elaborar las gráficas en el plano cartesiano que aparecen en las páginas 131, 132 y 133 de tu libro de texto para que te familiarices con los pasos y puedas identificar ecuaciones con dos incógnitas en dichos gráficos.
2. En una hoja de papel gráfico o milimétrico, dibuja un gráfico de dispersión con un conjunto de puntos.
3. Dibuja una línea que pase a través de los puntos en el gráfico de dispersión.
4. Identifica dos puntos en la línea y escribe sus coordenadas en la forma (x, y).
5. Usa los dos puntos para escribir la ecuación de la línea en forma de pendiente-intercepción ($y = mx + b$), donde m es la pendiente y b es la intercepción en y.
6. Repite los pasos 2-5 para un conjunto de puntos y línea diferente.
7. Compara las dos ecuaciones para ver si son similares de alguna manera.
8. Si las dos ecuaciones son similares, entonces representan la misma línea en el gráfico de dispersión y se pueden utilizar para identificar la relación entre las dos variables en el gráfico de dispersión.

9. Usando la guía impresa, revisa tu trabajo para asegurarte de su exactitud y realiza las revisiones y correcciones necesarias.

Sistemas de ecuaciones lineales

Definición	Sistemas de ecuaciones lineales
A un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas se le conoce como sistema de ecuaciones. La solución de un sistema de ecuaciones lineales se muestra como todos los pares ordenados (x, y) que satisfacen a la ecuación o ecuaciones planteadas. Tanto x como y, son números reales.	

Resolverlo consiste en determinar los valores de las dos incógnitas que cumplen simultáneamente las dos igualdades.

Ejemplos: $x + y = 10$ $x - y = 2$

Métodos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

Método de sustitución

Partiendo del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$6\text{n} + 3\text{m} = 159$$
$$2\text{n} + 8\text{m} = 228$$

Pasos:

1. Se despeja una incognita en una de las ecuaciones

$$6\text{n} + 3\text{m} = 159 \rightarrow m = \frac{159-6n}{3}$$

En este caso despejamos m para seguir con el siguiente paso

2. Se sustituye la expresion de esta incognita en la otra ecuacion

$$2\text{n} + 8\text{m} = 228 \rightarrow 2\text{n} + 8\left(\frac{159-6n}{3}\right) = 228$$

Debido a que la ecuación con la variable m remplazada quedo con solo una variable, podemos despejar dicha variable para determinar su valor.

$$\left(\frac{3}{3}\right)2\text{n} + 8\left(\frac{159-6n}{3}\right) = 228$$

$$\frac{6n+8(159-6n)}{3} = 228$$

$$\frac{6n+1272-48n}{3} = 228$$

$$\frac{1272-42n}{3} = 228$$

$$\text{n} = \frac{228*3-1272}{-42}$$

En este caso despejamos m para seguir con el siguiente paso.

3. Se sustituye la expresión de esta incógnita en la **otra ecuación**

$$2n + 8m = 228 \longrightarrow 2n + 8\left(\frac{159-6n}{3}\right) = 228$$

Debido a que la ecuación con la variable m reemplazada quedo con solo una variable, podemos despejar dicha variable para determinar su valor.

$$\left(\frac{3}{3}\right) 2n + 8\left(\frac{159-6n}{3}\right) = 228$$

$$\frac{6n+8(159-6n)}{3} = 228$$

$$\frac{6n+1272-48n}{3} = 228$$

$$\frac{1272-42n}{3} = 228$$

$$n = \frac{228*3-1272}{-42}$$

$$n = \frac{-588}{-42}$$

$$n = 14$$

4. El valor obtenido de n se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada. Es decir, en m $=\frac{159-6n}{3}$

$$m = \frac{159-6(14)}{3}$$

$$m = \frac{159-84}{3} = \frac{75}{3} = 25$$

5. Los dos valores obtenidos de n y m, vienen siendo el par de valores que satisfacen la ecuacion

$$n = 14 \qquad m = 15$$

Método de igualación

Partiendo del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$3x - 4y = -6$$

$$2x + 4y = 16$$

Pasos:

1. Se despeja la misma incognita en **ambas** ecuaciones

$$3x - 4y = -6 \longrightarrow x = \frac{-6+4y}{3}$$

$$2x + 4y = 16 \longrightarrow x = \frac{16-4y}{2}$$

2. Se igualan las dos expresiones

$$\frac{-6+4y}{3} = \frac{16-4y}{2}$$

3. Se resuelve la ecuación:

$$2(-6+4y) = 3(16 - 4y)$$

$$-12 + 8y = 48 - 12y$$

$$12y + 8y = 48 + 12$$

$$20\,y = 60$$

$$Y = 3$$

4. El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que se aparecía despejada la otra incógnita

$$x=\frac{-6+4\ (3)}{3}=2$$

$$x=\frac{16-4\ (3)}{2}=2$$

5. representamos la solución:

y= 3
x=2

Método Grafico

Partiendo del siguiente sistema de ecuaciones lineales

x + y = 5
2x- y =1

Pasos:

1. despejamos la variable en cada ecuacion y trazamos la recta asignando valores de x

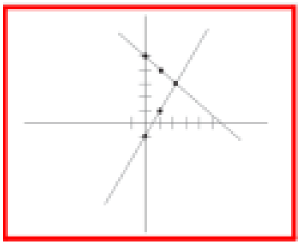
y = 5 – x

x	Y
0	5
1	4
2	3

Y= - 1+ 2x

x	Y
0	-1
1	1
2	3

Representamos graficamente las ecuaciones



2. Las rectas se cruzan en el punto (2,3). Este punto es la solución del sistema de ecuaciones: x= 2, y=3

Actividad 6

Aplica el aprendizaje logrado en el tema de Métodos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales

1. Une con una línea cada sistema de ecuaciones lineales con su respectiva solución:

$5x + 2y = 24$ $-3x+y = 56$		$(4,1)$
$x + 5y = 7$ $-2x - 7y = -5$		$(-8,3)$
$2x + 4y = -4$ $5x +7y = 11$		$(-4,2)$
$2x -7y = 1$ $2x +3y =11$		$(12,-7)$
$2x -3y = -14$ $-x +2y =8$		$(-8,32)$

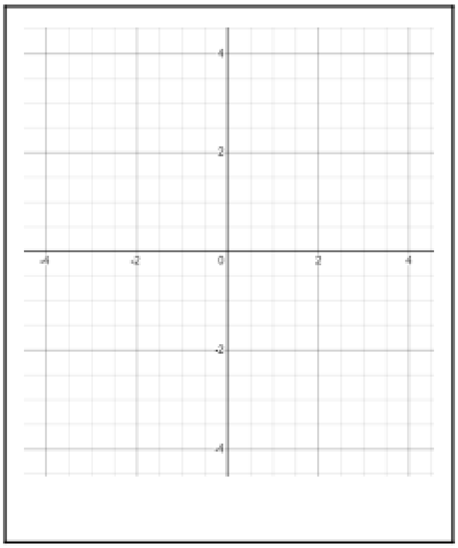
2. Para los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, utiliza el método gráfico para su resolución.

a) $-2x+y=0$

$x+ y=3$

x	y
0	
1	
2	

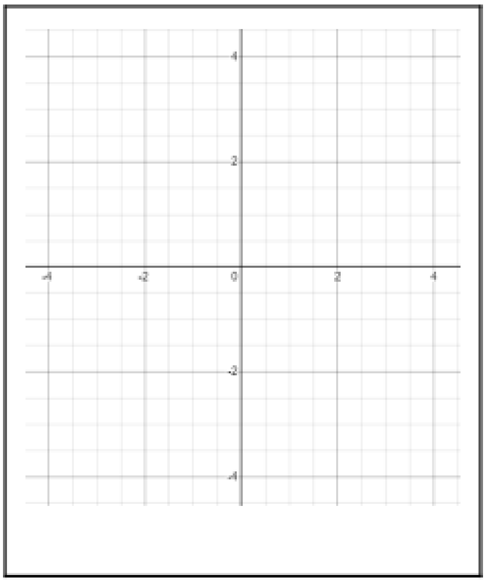
x	y
0	
1	
2	



b) $2x-3y=-2$
$x+y=4$

x	y
0	
1	
2	

x	y
0	
1	
2	



2.5 Ecuaciones cuadráticas y factorización

Definición	Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación cuadrática o de segundo grado es una expresión de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde x es la incógnita, a, b y c son números reales cualesquiera, con $a \neq 0$. Esta se conoce como la forma general de la ecuación cuadrática. Es importante mencionar que aquellas expresiones que tienen la forma general de la expresión cuadrática puede llegar a esta forma mediante operaciones de factorización y reducción de términos.

Nota importante: Para encontrar la solución a las ecuaciones cuadráticas es importante reducirlas y dejarlas en la forma general de la expresión cuadrática. Un método muy utilizado para solucionar este tipo de ecuaciones es la factorización, por lo que será importante hacer un paréntesis para explicar en qué consiste este método antes de aplicarlo a las expresiones cuadráticas. Es importante tener claro los conocimientos de operaciones algebraicas para la facilidad de entendimiento.

Definición	Factorización
La factorización consiste en la descomposición de una expresión algebraica con el producto de sus factores. En otras palabras, se basa en descubrir los factores que multiplicados dan como resultado la expresión algebraica con la que se parte.	

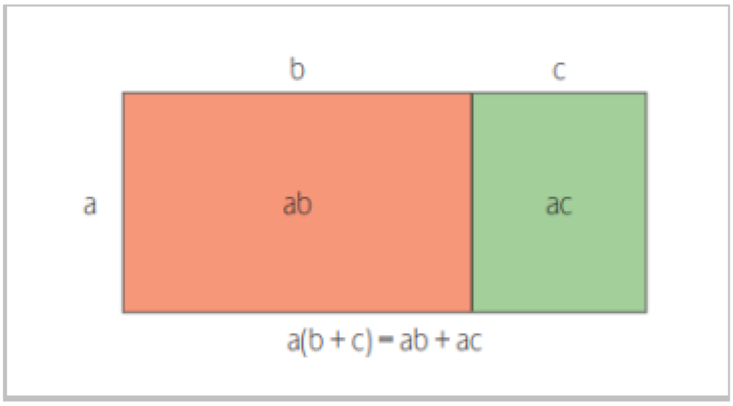
Factorización por factor común

Esta factorización se puede aplicar cuando cada uno de los términos de un polinomio tienen un factor común. Ese factor común será el máximo común divisor de todos los términos.

Ejemplo:

En la expresión matemática $ac + bc$, podemos factorizar el factor común c y obtener $c(a+b)$. Debido a que el término c es un factor común en el polinomio, puede ser factorizado.

Visto desde una perspectiva gráfica:



Podemos darnos cuenta de que ambos rectángulos diferenciados por colores tienen el mismo alto, pero, un ancho diferente. Por lo tanto, podemos observar que para calcular el total de las áreas de los dos rectángulos se puede reconocer el factor común (en este caso a), factorizar la expresión resultando en el producto de c por la suma de los términos (b y c).

Factorización por diferencia de cuadrados

Partiendo de dos binomios conjugados, que son aquellos que se diferencian entre sí únicamente por el signo de operación, por ejemplo: *(a + b)*, *(a − b)* son binomios conjugados, así como $(5x^3 - 3y^2)(5x^3 + 3y^2)$. Se encuentra que al multiplicarlos se obtiene lo siguiente:

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2$$

Reduciendo dicha expresión:

$$a^2-b^2$$

Por lo tanto, cada vez que nos encontremos con un binomio conjugado, no hace falta efectuar los pasos de multiplicación, pues solo se puede escribir los términos de los extremos elevados al cuadrado separados por el signo (−). Al resultado del producto de binomios conjugados se le llama diferencia de cuadrados.

Nota importante: A este tipo de multiplicaciones en las que el resultado que se obtiene sigue ciertas reglas fijas, se les llama productos notables, pues una vez que los entendemos y nos los aprendemos no tenemos que realizar todos los pasos del producto, sino simplemente poner el resultado que es conocido.

Factorización de Trinomios Cuadrados Perfectos

Cuando un binomio es elevado al cuadrado, es decir, se multiplican dos binomios iguales, obtengo un resultado que también es conocido, es decir, también es un producto notable al suceder lo siguiente:

$$(a+b)^2 = (a+b)\ (a+b)$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

En el caso en que los binomios se resten en lugar de sumarse, sucedería lo siguiente:

$$(a-b)^2 = (a-b)\ (a-b)$$

$$= a^2 - ab - ab + b^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

El resultado de un binomio al cuadrado se le conoce como trinomio cuadrado perfecto y es un producto notable.

Factorización de Trinomios de la forma: $x^2 + bx + c$

Para factorizar un trinomio de la forma x se debe buscar dos números que sumados $2 + bx + c$ den b y multiplicados den c. La factorización será el producto de dos binomios, donde cada uno sea la suma de x con cada uno de esos números. Por ejemplo:

$$x^2 + 10x + 24$$

Teniendo b con el valor de 10 y c con el valor de 24, procedemos a buscar dos números que sumados den 10 y multiplicados den 24, respetando siempre la ley de signos. En este caso nos damos cuenta de que 6 y 4 son los números que estábamos buscando, ya que:

$$6 + 4 = 10 = c$$

$$6 * 4 = 24 = b$$

por lo tanto, la factorización final será:

$$(x+6)\ (x+4)$$

Factorización de Trinomios de la forma: $ax^2 + bx + c$

Al tener una constante a que multiplica a x^2 en el trinomio, debemos proceder de manera distinta que en el anterior caso para factorizar la expresión. Partiendo del siguiente trinomio:

$$20x^2 - 2x - 6$$

Paso 1:

Multiplicamos a por b $\quad (20)\,(-6) = -12$

Paso 2:

Buscamos dos números que sumados den b en este caso (-2) y multiplicados den (-120). Nos damos cuenta de que los números que estamos buscando son:

-12 y 10

ya que $-12 + 10 = -2$

$$(-12)\,(10) = -120$$

Paso 3:

Se utilizarán dichos números para reemplazar a bx (en este caso $-2x$) con $-12x + 10x$, ambas constantes son los números que haya anteriormente. Si nos damos cuenta la suma de ambos nos da el valor de -2x por lo que es válido hacer este cambio en el trinomio, dejando la expresión de la siguiente manera:

$$20x^2 - 2x - 6 = 20x^2 + 10x - 12x - 6$$

Paso 4:

Se factorizan por separado los dos primeros términos, y los dos últimos:

$$20x^2 + 10x - 12x - 6 = 10x\,(2x + 1) - 6(2x + 1)$$

Considerando que $(2x + 1)$ es un factor común y que se puede factorizar, se tiene como resultado:

$$(2x + 1)\,(10x - 6)$$

Actividad 7

Aplica los procedimientos correspondientes en la resolución de cada uno de los ejercicios de factorización.

1. Factoriza las siguientes expresiones algebraicas por factor común

$ax - bx =$	
$5ax + 50b + 60c$=	
$63m^3n - 14m^2 - 84m^3n^2 =$	
$52x^3 + 36x^2 - 72 =$	
$22x^2y - 54x^3y + 7xyz =$	

2. Factoriza las siguientes expresiones:

a.x^2-16	b.x^2-25	c.x^2-36
d.x^2-81	e.x^2-144	

a.	
b.	
c.	
d.	
e.	

3. Factoriza las siguientes expresiones algebraicas.

$49x^2 + 28x + 4$=

$(11x + 3)^2 =$

$(12x + 1)^2 =$

$9x^2 + 12x + 4 =$

4. Factoriza las siguientes expresiones algebraicas y con una línea une con la respuesta correcta.

$x^2 + 12x + 35$	$(x + 11)(x - 2)$
$x^2 - x - 42$	$(x - 7)(x - 3)$
$x^2 - x + 56$	$(x - 7)(x + 6)$
$x^2 + 9x - 22$	$(x + 7)(x + 5)$
$x^2 - 10x + 21$	$(x - 8)(x + 7)$

5. Factoriza las siguientes expresiones algebraicas:

$6x^2 - 7x - 3$
$3x^2 - 5x - 2$

$5x^2 + 13x - 6$
$3m^2 - 5m - 2$
$2x^2 + 3x - 2$

Una vez que ya conoces las diferentes técnicas de integración podrás resolver ecuaciones cuadráticas de manera metódica.

Factorización para resolver ecuaciones cuadráticas:

Teniendo una ecuación cuadrática de la forma (ax) 2 + $bx + c$ $x^2 + bx + c$ podemos calcular sus soluciones mediante factorización de la siguiente manera. Partiendo de la expresión:

$$x^2 + 10x = -21$$

Se iguala la expresión a 0,

$$x^2 + 10x + 21 = 0$$

Ahora se factoriza con el método de la forma x y nos queda las siguiente 2 + $bx + c$ expresión:

$$(x + 7)(x + 3) = 0$$

Igualando cada binomio a 0 ya se pueden obtener los valores de x que satisfacen la ecuación inicial

$$x + 7 = 0 \; ; \; x + 3 = 0$$

$$x = -7 \; ; x = -3$$

Existe un método alternativo para encontrar la solución para las ecuaciones cuadráticas:

Resolución de ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula general:

Existe una fórmula general que nos permite encontrar los valores de x reemplazando diferentes términos de la ecuación:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Partiendo de una ecuación cuadrática, nos queda despejar los valores de los términos correspondientes de la fórmula y realizar las operaciones con suma y resta. Ejemplo:

$$2a^2 + 4x - 16$$

Reemplazamos valores de la expresión algebraica en la fórmula general y calculamos los valores de x que satisface la ecuación cuadrática:

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x_1 = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(2)(-16)}}{2(2)}$ $\boldsymbol{x_1 = 2}$	$x_2 = \dfrac{-4 - \sqrt{4^2 - 4(2)(-16)}}{2(2)}$ $\boldsymbol{x_2} = -4$

Nota importante: Hay que darse cuenta de que hay un cambio de signo en cada fórmula general para obtener los dos valores de x que satisfacen la ecuación cuadrática planteada inicialmente.

Actividad 8

Selecciona un método de factorización para resolver las siguientes ecuaciones.

Ecuación	Resultados
$a)\ 3x^2 - 12\,x - 36 = 0$	
b) $3x^{\,2} - 12x - 36 = 0$	
c) $x^{\,2} - 4x - 96 = 0$	
d) $x^{\,2} + 4x - 45 = 0$	
e) $x^{\,2} - 13x + 36 = 0$	

Autoevaluación Unidad 2

1. En un estacionamiento hay 120 vehículos entre motocicletas y automóviles, y sus llantas suman 410. ¿Cuántos de los vehículos son motocicletas y cuántos automóviles

I. ¿Cuál es la respuesta al problema?

a) 80 motocicletas y 40 automóviles

b) 30 motocicletas y 90 automóviles

c) 65 motocicletas y 55 automóviles

d) 35 motocicletas y 85 automóviles

II. ¿Cuáles son las incógnitas del problema anterior?

a) La cantidad de llantas por cada motocicleta y por cada automóvil

b) La cantidad total de vehículos entre motocicletas y automóviles

c) La cantidad de motocicletas y la cantidad de automóviles

d) La cantidad total de llantas entre motocicletas y automóviles

III. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones algebraicas no pertenece al sistema de ecuaciones que representa el problema?

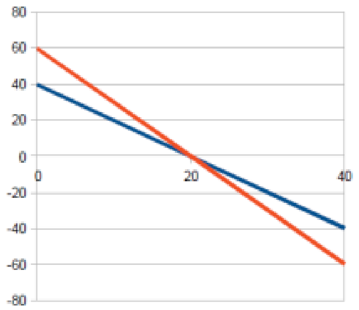
a) $2x + y = 120$

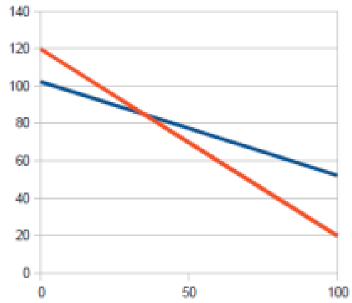
b) $x + y = 120$

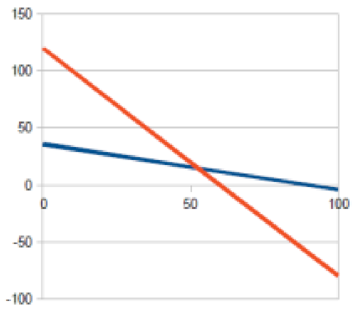
c) $2x + 4y = 410$

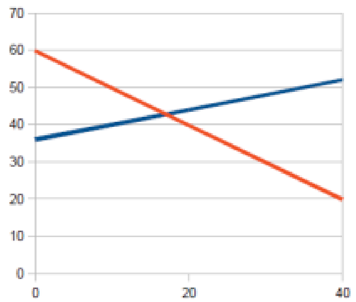
d) $y = 120 - x$

IV. ¿Cuál es la representación gráfica de este problema?

a)


b)


c)


d)


2. Felipe y Marco coleccionan monedas viejas. Felipe le dice a Marco: “Si me das dos monedas, tendré tantas como tú”, y Marco responde: “Sí, pero si tú me das cuatro, entonces tendré cuatro veces más que tú”. ¿Cuántas monedas tienen cada uno?

I. ¿Cuál es la solución al problema?

a) 10 y 14 b) 6 y 10 c) 16 y 20 d) 8 y 12

II. Si utilizo m para representar las monedas de Felipe y n para las de Marco, ¿cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones es correcto?

a) $m+2=n-2$

$n+4=4(m-4)$

b) $m+2=n$

$n+4=m-4$

c) $2m+2=2n-2$

$n+4=4(m-4)$

d) $n+2=2(m-2)$

$m+4=n-4$

3. Encuentra dos números cuya suma sea 32 y su producto 255.

I. ¿Cuáles son los dos números?

a) 25 y 7 b) 27 y 5 c) 7 y 25 d) 15 y 17.

II. ¿De qué grado es la ecuación que tienes que utilizar para resolver este problema?

a) Primero b) Segundo c) Lineal d) Tercer

Respuestas de autoevaluaciones

Respuestas de autoevaluación (Unidad 1)

Problema 1	Problema 2	Problema 3
1. c)	1. d)	1. b)
2. a)	2. c)	2. c)
3. b)		3. a)

Respuestas de autoevaluación (Unidad 2)

Problema1	Problema 2	Problema 3
1. d)	1. d)	1. d)
2. c)	2. a)	2. b)
3. a)		
4. b)		

Solución de actividades

UNIDAD 1

Actividad 1

Naturales: $\sqrt{4},\ \frac{8}{4}$

Enteros: $-3,\ \sqrt{4},\ \frac{8}{4},\ -9$

Racionales: $-3,\ 2.7,\ \frac{3}{7}\ ,\ \sqrt{4}, \frac{23}{13},\ \frac{8}{4},\ -9,\ \ 2.3, 2.838383$

Reales: Todos

Actividad 2

1. a) 24 ÷ –8 = –3

b) –120 ÷ 10 = –12

c) Necesitamos saber cuántos kilómetros recorre el coche en una hora. Debemos dividir 584.3 ÷ 5.5 = 106.2364 km/h.

d) Para 150000 kilómetros necesita trabajar 150000 ÷ 300 = 500 días. Como trabaja 5 días a la semana, tardará 500 ÷ 5 =100 semanas en llegar a los 150000 kilómetros.

2. a) distributiva

b) asociativa

c) conmutativa

Actividad 3

1

a) $81^{\frac{1}{2}}$	4
b) $8^{\frac{2}{3}}$	no está definida
c) $\sqrt{-5^2}$	-2
d) $\sqrt[5]{-32}$	9
e) $\sqrt[4]{-625}$	0
f) $\sqrt{0}$	5

2

a) -3
b) 1
c) 11
d) -7
e) 10
f) 2

Actividad 4

1.

Encierra en un cuadro rojo todas las que sean fracciones equivalentes de $\frac{7}{9}$:

$\frac{27}{36}$ $\boxed{\frac{49}{63}}$ $\frac{14}{27}$ $\boxed{\frac{-14}{-18}}$ $\frac{-14}{18}$ $\boxed{\frac{350}{450}}$

2.

a) $\frac{-4}{7}+\frac{2}{9}=\frac{-36+14}{63}=\frac{-22}{63}$

b) $\frac{13}{8}\cdot\frac{-6}{7}=\frac{-78}{56}$

c) $4\frac{1}{9}\div\frac{-5}{3}=\frac{37}{9}\div\frac{-5}{3}=\frac{111}{-45}$, que puede ser simplificado a $\frac{37}{-15}$

d) $\frac{-2}{3}+\left(\frac{-5}{2}\right)^3=\frac{-2}{3}+\frac{-125}{8}=\frac{-16-375}{24}=\frac{-391}{24}$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^2\div\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\frac{4}{9}\div\frac{-27}{-8}=\frac{32}{243}$

f) $\left(\frac{-2}{3}+\frac{-5}{2}\right)^3\div2\frac{3}{5}=\left(\frac{-4-15}{6}\right)^3\div\frac{13}{5}=\left(\frac{-19}{6}\right)^3\div\frac{13}{5}=\frac{-6859}{216}\div\frac{13}{5}=\frac{-34295}{2808}$

Actividad 5

	2	3	4	5	7
60	si	si	si	si	no
490	si	no	no	si	si
125	no	no	no	si	no
210	si	si	no	si	si
49	no	no	no	no	si
100	si	no	si	si	no

Actividad 6

1.

a). MCM (40, 90) = 360

b). MCM (15, 18, 24) = 360

c). MCM (20, 36, 60) = 180

d). MCM (100, 150) = 300

2.

a) MCD (75, 90) = 15

b). MCD (30, 36, 48) = 6

c). MCD (200, 360) = 40

d). MCD (100, 150, 180) = 10

Actividad 7

1.

Encuentra el valor de la incógnita.

A. $x+8=15 \rightarrow x+8-8=15-8 \rightarrow x=7$

B. $x-9=-3 \rightarrow x-9+9=-3+9 \rightarrow x=6$

C. $x-\frac{7}{4}=-\frac{17}{8} \rightarrow x-\frac{7}{4}+\frac{7}{4}=-\frac{17}{8}+\frac{7}{4} \rightarrow x=-\frac{3}{8}$

D. $x-14=17 \rightarrow x-14+14=17+14 \rightarrow x=31$

E. Ecuación $3x = 48$. Si multiplicamos por el inverso multiplicativo de 3, o sea, por $\frac{1}{3}$ dejamos sola a la x, pues estará multiplicada por 1: $\frac{1}{3}$ x $3x = \frac{1}{3}$ x$48, x = 16$

2.

Encuentra la incógnita utilizando la propiedad de la multiplicación.

A. $5x=15 \rightarrow \frac{1}{5}\cdot 5x=\frac{1}{5}\cdot 15 \rightarrow x=3$

B. $\frac{1}{4}x=13 \rightarrow 4\cdot\frac{1}{4}x=4\cdot 13 \rightarrow x=52$

C. $\frac{2}{3}x=8 \rightarrow \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x=\frac{3}{2}\cdot 8 \rightarrow x=12$

D. Para encontrar el perímetro del cuadrado, primero necesitamos encontrar la medida de sus lados. Si x es la incógnita que representa el lado del cuadrado, entonces el perímetro será igual a 4 veces x: $P = 4x$

Entonces, ¿cómo podemos encontrar x? Sabemos que el área del cuadrado es igual a 36 m² y se obtiene al multiplicar lado por lado. La ecuación que expresa el área es la siguiente: $x^2 = 36$

Ahora podemos usar la propiedad de la raíz, que permite obtener la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación con el fin de dejar a la x sola.

Recuerda que existen dos números que satisfacen que su cuadrado es igual a 36, el 6 y el –6. Sin embargo, x representa una distancia y por lo tanto no puede ser negativa. Entonces, $x = 6$ tenemos pues que $P = 4\text{x}6 = 24$ metros.

Del mismo modo usamos la propiedad de la potencia para despejar a la x en caso de que esté dentro de una raíz.

Por ejemplo, si tenemos la siguiente ecuación: $\sqrt[3]{x} = 7$ Elevamos a la potencia *3* a ambos lados de la ecuación $\sqrt[3]{x^3 = 7^3}$ para despejar *a x*, $x = 343$

3.

$A. x^3$=216

B. $\sqrt[4]{x = 5}$

C. $\sqrt[4]{x^2 = 2}$

Actividad 8

A. $\frac{15}{24} = \frac{180}{x} \rightarrow x \cdot 15 = 24 \cdot 180 \rightarrow x = \frac{24 \cdot 180}{15} \rightarrow x = 288$ kilómetros.

B. $\frac{8}{x} = \frac{60}{25} \rightarrow x \cdot 60 = 8 \cdot 25 \rightarrow x = \frac{200}{60} = 3.333$ litros.

C. $\frac{2}{5} = \frac{100}{x} \rightarrow x \cdot 2 = 5 \cdot 100 \rightarrow x = \frac{500}{2} = 250$ kilómetros.

Actividad 9

A. $\frac{800}{1200} = \frac{x}{100} \rightarrow x \cdot 1200 = 100 \cdot 800 \rightarrow x = \frac{100 \cdot 800}{1200} = \frac{80000}{1200} = 66.6666\,\%$

B. $\frac{200}{4000} = \frac{x}{100} \rightarrow x \cdot 4000 = 100 \cdot 200 \rightarrow x = \frac{20000}{4000} = 5\,\%$

C. $\frac{x}{13500} = \frac{107}{100} \rightarrow x \cdot 100 = 107 \cdot 13500 \rightarrow x = \frac{107 \cdot 13500}{100} = 14445$ pesos.

D. $\frac{x}{16000} = \frac{85}{100} \rightarrow x \cdot 100 = 1600 \cdot 85 \rightarrow x = \frac{1600 \cdot 85}{100} = 13600$ pesos.

UNIDAD 2

Actividad 1

El doble de un número más cuatro	El doble de la suma de un número más cuatro	La tercera parte del cuadrado de un número	Un número menos siete
2x + 4	2(x + 4)	x^2 / 3	x - 7
El cubo de la suma de un número más seis	El triple de un número más su cuarta parte	El número once menos el triple de un número	La suma de dos números consecutivos
(x + 6)^3	3x + x/4	11 - 3x	x + (x + 1)

Actividad 2

a)Años de Ana Belén dentro de 12 años = **X + 12**

b) La cuarta parte de un número más su siguiente. = $\frac{x}{4} + (x + 1)$

c) Perímetro de un cuadrado= **4x**

d) La edad de una señora es el doble de la de su hijo menos 5 años= **2x - 5**

e) Antonio tiene 20 euros más que Juan = **x + 20**

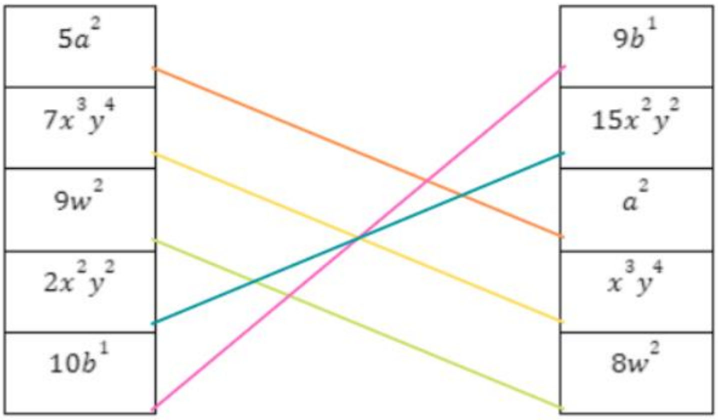
f) Número de ovejas después de nacer 18 corderillos= **x + 18**

Actividad 3

1

Monomio	Coeficiente	Variable	Grado
$4x^5$	**4**	**x**	**5**
$\frac{xy}{2}$	**1/2**	**x,y**	**1**
$-x$	**-1**	**x**	**1**
$\frac{2}{3}x^2yz$	**2/3**	**x,yz**	**2**

2.



3.

1) $3m - 7m + 2m$ **$= -2m$**

2) $12x - 5x - 8x$ **$= -x$**

3) $12m - 6m - m$ **$= 5x$**

4) $12x^2 + 3x^2 - 6y^2 - 5y$ **$= 15x^2 - 6y^2 - 5y$**

5) $8y^2 + 9y^2 - 38x$ **$= 17y^2 - 38x$**

6) $10a - 5a + 3a$ **$= 8x$**

7) $10x^5 + 5x^2 - x^2$ **$= 10x^5 + 4x^2$**

8) $9y^4 + 5y^4 - x^2 + 5x^2$ $= 14y^4 + 4x^2$

4

1)Carmen fue a la paletería y compró cuatro paletas y un litro de helado que le costaron \$55; si pagó \$103 en total, ¿cuál es el precio de una paleta?

Solución:Como son 4 paletas, suma 4 veces x, más el valor del helado, que es 55 pesos, todo esto es igual a 103 pesos.

plantear la ecuación para este problema: $4x + 55 = 103$

2)Jaime y Eduardo ahorraron juntos 520 pesos. Si Jaime tiene 52 pesos más que su hermano, ¿cuánto ahorró Eduardo?

Solución:Identifica las constantes, que en esta situación son:

520 pesos, que han ahorrado juntos.

Y 52 pesos, que Jaime tiene más que Eduardo.

plantear la ecuación para este problema: $x + (x + 52) = 520$

3)Considerando un triángulo en donde el ángulo B mide 40 grados más que el ángulo A, y el ángulo C mide 12 grados. ¿Cuánto mide el ángulo A?

Solución:Determinamos los datos que representan las constantes.

El ángulo B mide 40 grados más que el ángulo A, y como la medida del ángulo A la representamos con la incógnita "x" entonces la medida del ángulo B la podemos representar como: $x + 40$, la medida del ángulo C es igual a 12 grados y la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180 grados.

4)¿Cuál es la edad de Jimena si su papá tiene 27 años más que ella y su mamá tiene 34 años? Además, se sabe que la suma de las tres edades es igual a la diferencia de 10 veces la edad de Jimena, menos de 3 años.

Solución: La edad de Jimena está representada con la incógnita "x".La edad de su papá, como: "$x + 27$". Y la edad de su mamá es de 34 años. Entonces la suma de estas tres edades se representa como:" $x + (x + 27) + 34$"

Ahora modelemos: "la diferencia de 10 veces la edad de Jimena, menos 3 años". Ésta se representa con la expresión algebraica: "$10x - 3$"

plantear la ecuación para este problema: $x + x + 27 + 34 = 10x - 3$

Actividad 4

1

2

$13x^3$

Grado: 3, coefeciente: 3

$25x^{-3}$

No, porque el exponente no es un número natural.

$33x + 1$

No, porque aparece una suma.

$\sqrt{2}x$

Grado: 1, coefeciente: $\sqrt{2}$

$-\frac{3}{4}x^2$

Grado: 4, coefeciente: $-\frac{3}{4}$

$\frac{-3}{x^2}$

No, no tiene exponente natural.

$2\sqrt{x}$

No, porque la parte literal está dentro de una raíz.

$2x^3 - 5x^3 = -3x^3$

$3x^4 - 2x^4 + 7x^4 = 8x^4$

$(2x^3) \cdot (5x)^3 = 10x^6$

$(12x^3) : (4x) = 3x^2$

$(18x^6 y^2 z^5) : (6x^3 y z^2) = 3x^3 y z^3$

$(2x^3 y^2)^3 = 8 x^9 y^6$

$(2 x^3 y^2 z^5)^5 = 32 x^{15} y^{10} z^{25}$

$3x^3 - 5x^3 - 2x^3 = -4x^3$

$(12 x^3 y^5 z^4) : (3x^2 y^2 z^3) = 4xy^3 z$

Actividad 5

a) *x=5*

b) x=5

c) x=4

d) x=8

e) x =4

f) x=6

g) X= 7

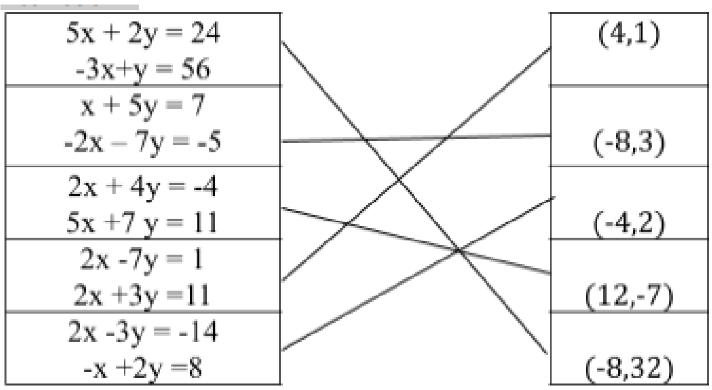
h) x=4

i) x= 18

j*) x=9*

Actividad 6

1



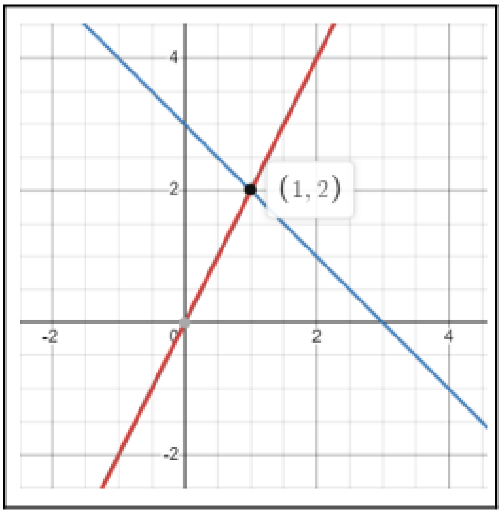
2

a)-2x+y=0

x+y=3

x	y
0	0
1	2
2	4

x	y
0	3
1	2
2	1

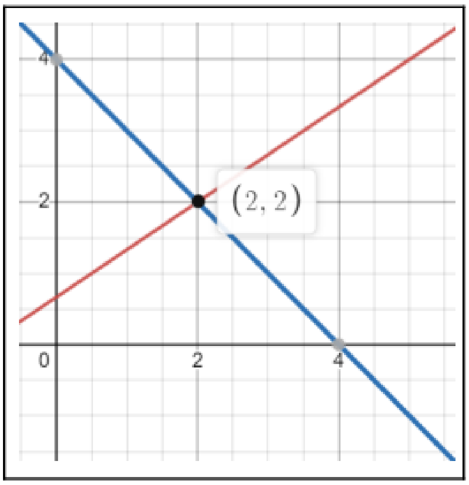


b) 2x-3y=-2

x+y=4

x	y
0	2/3
1	4/3
2	2

x	y
0	4
1	3
2	2



Actividad 7

1

$ax - bx =$	$x(a + b)$
$5ax + 50b + 60c =$	$5(ax + 10b + 12c)$
$63m^3n - 14m^2 - 84m^3n^2=$	$7m^2(mn - 14 - 84mn)$
$81x^4 + 36x^2 - 72 =$	$9(9x^4 + 4x^2 - 8)$
$22x^2y - 54x^3y + 7xyz =$	$xy(22x - 54x^2 + 7z)$

2.

a.	$(x + 4)(x - 4)$
b.	$(x + 5)(x - 5)$
c.	$(x + 6)(x - 6)$
d.	$(x + 8)(x - 8)$
e.	$(x + 12)(x - 12)$

3

$49x^2 + 28x + 4= (7x + 2)^2$

$(11x + 3)^2= 121x^2 + 66x + 9$

$(12x + 1)^2 = 144x^2 + 24x + 1$

$9x^2 + 12x + 4= (3x + 2)^2$

4

x2+12x+35	(x+11)(x-2)
x2-x-42	(x-7)(x-3)
x2-x+56	(x-7)(x+6)
x2+9x-22	(x+7)(x+5)
x2-10x+21	(x-8)(x+7)

5.

$6x^2 - 7x - 3$	$(2x - 3)(3x + 1)$
$3x^2 - 5x - 2$	$(x - 2)(3x + 1)$
$5x^2 + 13x - 6$	$(5x - 2)(x + 3)$
$3m^2 - 5m - 2$	$(a - 2)(3a + 1)$
$2x^2 + 3x - 2$	$(x + 2)(2x - 1)$

Actividad 8

a.	$x = 2; x =- 12$
b.	$x = 6 ; x =- 2$
c.	$x = 12 ; x =- 8$
d.	$x = 5 ; x =- 9$
e.	$x = 9 ; x = 4$

¡A practicar!

Nos complace anunciarte que has llegado al final de tu módulo, ¿crees estar preparado para el siguiente reto?

Pon a prueba tus conocimientos, compara las respuestas de tus actividades con las soluciones que ofrece la última sección de esta guía. Si tu resultado no es aprobatorio, ¡no te preocupes!, puedes regresar a los recursos del libro para reforzar los contenidos que necesites volver a retomar y así acreditar el examen oficial.

Felicidades por llegar hasta aquí, siendo un aprendizaje independiente el éxito es tuyo.